

Chapitre 28 : Intégration d'une fonction continue sur un segment

Table des matières

1	Notions d'intégrale.	2
1.1	Définition pour une fonction positive.	2
1.2	Définition pour une fonction de signe quelconque.	2
2	Méthodes de calculs.	3
2.1	A l'aide d'une primitive.	3
2.2	Intégration par parties.	3
2.3	Changement de variables.	4
3	Propriétés de l'intégrale.	4
3.1	Règles de calcul.	4
3.2	Intégrales et inégalités.	5
3.3	Valeur moyenne.	5
4	Applications.	5
4.1	Sommes de Riemman.	5
4.2	Valeur approchée d'une intégrale.	6
4.3	Fonction définie par une intégrale.	6

1 Notions d'intégrale.

1.1 Définition pour une fonction positive.

Définition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **positive et continue** sur $[a, b]$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ l'aire du domaine \mathcal{D} défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

\mathcal{D} est le domaine délimité par la courbe de f , les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses.

On note également cette quantité $\int_a^b f$.

Exemple 2 Soit $f : x \rightarrow 2x + 3$. Déterminer $\int_0^1 f(t)dt$.

Remarque 3 La lettre t est appelée variable d'intégration. Elle est correctement définie par le symbole \int . Elle est muette et peut-être remplacée par une autre lettre, **non déjà utilisée**. Elle n'existe plus en dehors de l'intégrale.

1.2 Définition pour une fonction de signe quelconque.

Définition 4.

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.

On note

$$f_+ : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(f(x), 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(-f(x), 0) \end{cases}$$

- f_+ est la partie positive de f et f_- est la partie négative de f .
- $\forall x \in [a, b]$, $f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \geq 0$ et $f = f_+ - f_-$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ la quantité défini par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt$$

Définition 5 (Echange des bornes).

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)dt = 0.$$

2 Méthodes de calculs.**2.1 A l'aide d'une primitive.****Théorème 6.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Soit F une primitive de f sur I . Soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors,

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 7 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+5} dx = [\ln(x^2+5)]_0^1 = \ln(6) - \ln(5) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$.

Exemple 8 Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt$.

Remarque 9 Il faut connaître des primitives usuelles.

Exemple 10 Calculer $\int_0^\pi \cos^2(t) dt$.

Exemple 11 Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+t^2} dt$.

2.2 Intégration par parties.**Définition 12.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I .
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Théorème 13.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur I . Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemple 14 Calculer $A = \int_0^1 te^{2t} dt$.

Exemple 15 Calculer $A = \int_1^{e^2} \ln(t) dt$.

2.3 Changement de variables.

Théorème 16.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .
 Soit ϕ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle J tel que $\phi(J) \subset I$.
 Soit $(a, b) \in J^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Méthode 1.

Le changement de variable se passe en 3 étapes :

1. On pose $x = \phi(t)$. (donné dans l'énoncé, sauf dans des cas simples)
2. On "dérive" pour obtenir le lien entre dx et dt : $dx = \phi'(t)dt$.
3. On remplace les bornes, le dt et le $\phi(t)$.

Exemple 17 Via le changement de variable $u = e^t$, calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt$.

Théorème 18.

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $I = [-a, a]$.

1. Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Théorème 19.

Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} et périodique de période T . Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

3 Propriétés de l'intégrale.

3.1 Règles de calcul.

Théorème 20.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a, b]$.
 L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Linéarité** : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles** : $\forall c \in [a, b], \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3.2 Intégrales et inégalités.

Théorème 21.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a, b]$.
L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
2. **Positivité** : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
3. **Croissance** : Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Exemple 22 Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite u est décroissante.
2. Montrer que la suite u est bornée.
3. En déduire que la suite u est convergente.

Théorème 23.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ **de signe constant**.

1. Si f est strictement positive, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f > 0$.
2. Si f est strictement négative, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f < 0$.
3. $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur $[a, b]$.

3.3 Valeur moyenne.

Théorème 24.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$.
Alors,

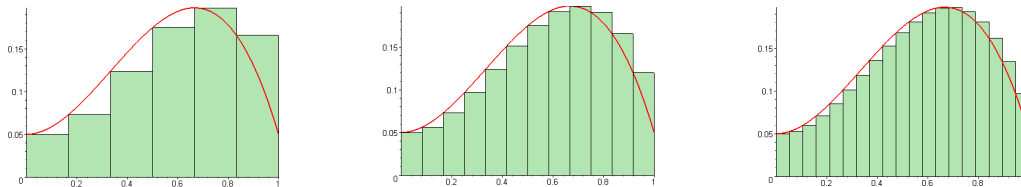
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Plus précisément, $\exists c \in]a; b[$ tel que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = f(c)$.

La valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.

4 Applications.

4.1 Sommes de Riemman.

**Théorème 25.**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Théorème 26 (Version générale.).

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Exemple 27 Etudier la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$.

Exemple 28 On s'intéresse à la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n^2 - k^2}}$.
Montrer qu'elle converge et exprimer sa limite à l'aide d'une intégrale.

4.2 Valeur approchée d'une intégrale.

En voyant l'intégrale comme une limite de suites, on peut approcher la valeur d'une intégrale avec le code suivant.

```

1 def rectangle(f, a, b, n):
2     S=0
3     h=(b-a)/n
4     for i in range(n):
5         S=S+f(a+i*h)
6     return h*S

```

4.3 Fonction définie par une intégrale.**Théorème 29.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur I .

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Théorème 30 (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Autrement dit, F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 31 Soit $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+ et déterminer sa dérivée.