

Exercice 1. Calculer les fractions suivantes.

1. $\frac{-12}{5} \div \left(\frac{-6}{5}\right)$
2. $\frac{3^{21} + 3^{22}}{3^{33} - 3^{30}}$
3. $\frac{5!}{2!3!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.
4. $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$
5. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$

1. $\frac{-12}{5} \div \left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{-12}{5} \times \frac{5}{-6} = \frac{-12 \times 5}{5 \times (-6)} = 2$
2. $\frac{3^{21} + 3^{22}}{3^{33} - 3^{30}} = \frac{3^{21}(1 + 3)}{3^{30}(3^3 - 1)} = \frac{4 \times 3^{21}}{26 \times 3^{30}} = \frac{2}{13 \times 3^9}$.
3. $\frac{5!}{2!3!} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 2 \times 3} = 10$
4. $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)} = \frac{2022}{(-2022)^2 + (1 - 2022)(1 + 2022)} = \frac{2022}{2022^2 + 1 - 2022^2} = 2022$.
5. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 = \frac{25 \times 2}{(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{50}{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \frac{25}{2 + \sqrt{3}} = \frac{25(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 25(2 - \sqrt{3})$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exercice 2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(x - 3)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= (2x + 1)(x - 3) \Leftrightarrow (2x + 1)[(2x + 1) - (x - 3)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$

2. $36x^2 - 49 - (6x + 7)(6x - 1) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 36x^2 - 49 - (6x + 7)(6x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (6x - 7)(6x + 7) - (6x + 7)(6x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (6x + 7)[(6x - 7) - (6x - 1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (6x + 7) \times (-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7}{6} \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{-\frac{7}{6}\right\}$

3. $(-9x - 8)(8x + 8) = 64x^2 - 64$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (-9x - 8)(8x + 8) &= 64x^2 - 64 \Leftrightarrow (-9x - 8)(8x + 8) - (8x - 8)(8x + 8) \\ &\Leftrightarrow (8x + 8)[(-9x - 8) - (8x - 8)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (8x + 8)(-17x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Donc $S = \{-1, 0\}$

4. $4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 7 \geq 0$$

$2x^2 + 2x - 7$ est un polynôme de degré 2 dont les racines donc $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{60}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ et

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{60}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}.$$

On sait que ce polynôme est du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines donc

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}, +\infty \right[$$

Donc $S = \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}, +\infty \right[$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "(1 + a)^n \geq 1 + na"$.

I : Pour $n = 0$,

$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) \\ &\geq 1 + na + a + na^2 \end{aligned}$$

Or, $na^2 \geq 0$ donc $(1 + a)^{n+1} \geq (n + 1)a$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

C : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, développer ou factoriser les expressions suivantes

1. $(a + 2)^3$

3. $\sqrt{(-a)^2}$

2. $a^4 - 1$

4. $\sqrt{(3 - a)^2}$

1. $(a + 2)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2 + 3 \times a \times 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8.$

2. $a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$

3. $\sqrt{(-a)^2} = |-a| = |a|.$

4. $\sqrt{(3 - a)^2} = |3 - a|$

Exercice 5. [*] Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On va démontrer chacune des inégalités séparément.

- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$
- $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+a}{ab} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}}{2} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

Exercice 6. Introduction aux complexes

Soit $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i}^2 = -1$. Calculer les expressions suivantes.

1. $\mathbf{i}^3$
2. $(-\mathbf{i})^4$
3. $(1 + \mathbf{i})^2$
4. $(4 - 5\mathbf{i})(3 + 4\mathbf{i})$
5. $\frac{4 - 5\mathbf{i}}{3 + 4\mathbf{i}}$

1. $\mathbf{i}^3 = \mathbf{i} \times \mathbf{i}^2 = -\mathbf{i}.$
2. $(-\mathbf{i})^4 = \mathbf{i}^4 = (\mathbf{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1.$
3. $(1 + \mathbf{i})^2 = 1 + 2\mathbf{i} + (\mathbf{i})^2 = 1 + 2\mathbf{i} - 1 = 2\mathbf{i}.$
4. $(4 - 5\mathbf{i})(3 + 4\mathbf{i}) = 12 + 16\mathbf{i} - 15\mathbf{i} - 20\mathbf{i}^2 = 12 + \mathbf{i} + 20 = 32 + \mathbf{i}.$
5. $\frac{4 - 5\mathbf{i}}{3 + 4\mathbf{i}} = \frac{(4 - 5\mathbf{i})(3 - 4\mathbf{i})}{9 - 16\mathbf{i}^2} = \frac{12 - 16\mathbf{i} - 15\mathbf{i} + 20\mathbf{i}^2}{25} = \frac{-8 - 31\mathbf{i}}{25}.$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x + 2| = 5$
3. $|3 - x| = x + 1$
4. $|x| \leq 3$
5. $|x - 3| \leq 4$
6. $2 < |x + 1| < 3$

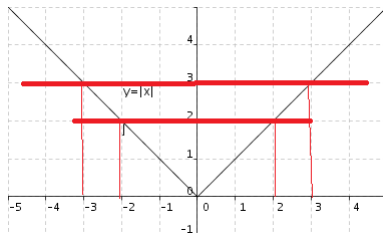
Soit $x \in \mathbb{R}.$

1. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Donc, $S = \{-2, 2\}.$
2. $|x + 2| = 5 \Leftrightarrow x + 2 = 5$ ou $x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -7$. Donc, $S = \{-7, 3\}.$
3. Si $x + 1 < 0$, cette équation n'a pas de solution.
On suppose $x \geq -1$.

$$\begin{aligned}
 |3 - x| = x + 1 &\Leftrightarrow 3 - x = x + 1 \text{ ou } x - 3 = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -3 = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

Donc, $S = \{1\}$

4. $|x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3]$. Donc, $S = [-3, 3]$
5. $|x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-1, 7]$. Donc, $S = [-1, 7]$
- 6.



$$2 < |x + 1| < 3 \Leftrightarrow 2 < x + 1 < 3 \text{ ou } -3 < x + 1 < -2 \Leftrightarrow x \in [-4, -3] \cup [1, 2]$$

Donc, $S = [-4, -3] \cup [1, 2]$

Exercice 8. Donner des exemples de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $x \neq y$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 0, 3 \rfloor = \lfloor 0, 7 \rfloor$ ou $\lfloor -2, 3 \rfloor = \lfloor -2, 8 \rfloor$.
2. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
 $\lfloor 1, 2 + 0, 5 \rfloor = \lfloor 1, 2 \rfloor$.
3. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 1, 4 + 1, 5 \rfloor = \lfloor 1, 4 \rfloor + \lfloor 1, 5 \rfloor$.
4. $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 2, 6 + 1, 6 \rfloor = 4$ et $\lfloor 2, 6 \rfloor + \lfloor 1, 6 \rfloor = 3$.

Exercice 9. [*] Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$.
 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur à $x + y$ et $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$ donc
 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
- On a $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$.
De plus, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
On a donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
Or, ce sont des entiers donc $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Soit $x \in [0, 1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$.
De plus, $0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$. Donc $0 \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < 1$
Donc, pour $x \in [0, 1[, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$.
On a bien $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

2. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x + 1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1) \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx + n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

La fonction h est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

La fonction h est nulle sur $[0, 1[$ et elle est 1-périodique. Elle est nulle sur $\mathbb{R}$ et on obtient l'égalité souhaitée.