

Exercice 1. Calculer les expressions suivantes

1. $A = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right).$

$$\left| \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \right.$$

2. $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right).$

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \right.$$

3. $C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right).$

$$\left| \begin{aligned} \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} = \frac{3-5\sqrt{3}}{3}. \end{aligned} \right.$$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expression suivantes

1. $A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

$$\left| A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x) - \sin(x) = 0. \right.$$

2. $B = \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right).$

$$\left| B = \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x) - \cos(x) = -2\cos(x). \right.$$

3. $C = \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

$$\left| \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = -\sin(x). \right.$$

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$

4. $|\sin(x)| > \frac{1}{2}.$

2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}.$

5. $|\tan(x)| < \sqrt{3}.$

3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1.$

6. $\sin(2x) = \sin(x).$

7* $\cos(x) + \sin(x) = 0.$

$$\begin{aligned} 1. \cos^2(x) = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2. \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3. \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \right) = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) \right) =$$

1.

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$S = \left\{ 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4. |\sin(x)| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) > \frac{1}{2} \text{ ou } -\sin(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) > \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) < -\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right[.$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right[$$

$$5. |\tan(\theta)| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \tan(\theta) < \sqrt{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in \left] \frac{-\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right[.$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{-\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right[$$

$$6. \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$$S = \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$7. \cos(x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 4. Déterminer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned} &\text{On remarque que } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \text{ donc } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right). \text{ Donc,} \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \text{ Or, } \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \\ &\frac{2+\sqrt{3}}{4}. \text{ De plus, } \frac{5\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0. \text{ Donc, } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$.

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(\theta+2\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta)[2\cos^2(\theta)-1] - \sin(\theta) \times 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2[1 - \cos^2(\theta)]\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(\theta)[4\cos^2(\theta) - 3]. \end{aligned}$$

2. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{l} \text{On applique la formule précédente à } \theta = \frac{\pi}{6}. \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3 \right] \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ ou } \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}. \\ \text{On retrouve la valeur connue.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2$.

1. Déterminer une équation du second degré (E) dont $\cos(x)$ est solution.

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{l} \sin^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos^2(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) + 1 = 0. \\ \text{Donc, } \cos(x) \text{ est solution de l'équation } (E) : y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + 1 = 0 \text{ ou encore } (E) : 2y^2 - 3\sqrt{2}y + 2 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation (E) .

$$\left| \begin{array}{l} \text{Il s'agit d'une équation du second degré : } \Delta = 18 - 16 = 2 > 0 \text{ donc il y a deux racines réelles} \\ y_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Donc, } \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = \sqrt{2}. \text{ La deuxième équation n'a pas de solution donc} \\ \sin^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{array} \right.$$

Exercice 7. [*]

1. Soit $s \in [-1, 1]$. Simplifier $\sin(\arcsin(s))$.

$$\left| \begin{array}{l} \arcsin(s) \text{ est l'unique solution dans } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ de l'équation } \sin(x) = s. \\ \text{Donc, } \sin(\arcsin(s)) = s. \end{array} \right.$$

2. Soit $s \in [-1, 1]$. Simplifier $(\cos(\arcsin(s)))^2$.

$$| (\cos(\arcsin(s)))^2 = 1 - (\sin(\arcsin(s)))^2 = 1 - s^2.$$

3. En déduire $\cos(\arcsin(s))$.

$$\left| \begin{array}{l} (\cos(\arcsin(s)))^2 = 1 - s^2. \text{ Donc, } |\cos(\arcsin(s))| = \sqrt{1 - s^2}. \\ \text{Or, } \arcsin(s) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ donc } |\cos(\arcsin(s))| \geq 0. \\ \text{Donc, } \cos(\arcsin(s)) = \sqrt{1 - s^2}. \end{array} \right.$$

4. Résoudre l'équation $\arcsin(s) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit } s \text{ solution de l'équation.} \\ \arcsin(s) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \\ \text{Donc } s = \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right). \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } s &= \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) + \cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) \sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\
\text{Donc } s &= \frac{4}{5} \cdot \left| \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \right| + \left| \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \right| \cdot \frac{5}{13} \\
\text{Donc } s &= \frac{4}{5} \cdot \left| \sqrt{\frac{144}{13^2}} \right| + \left| \sqrt{\frac{9}{5^2}} \right| \cdot \frac{5}{13} = \frac{4 \times 12}{5 \times 13} + \frac{3 \times 5}{5 \times 13} \\
\text{Donc } s &= \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

On vérifie ensuite que cette valeur convient.

Exercice 8.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que si $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ alors $\sin(a) = 0$.

On suppose que $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.

Donc, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{a}{2^n} = k\pi$.

Donc, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2^n k\pi$.

Donc, $\sin(a) = 0$.

On en déduit (voir chapitre 3) que si $\sin(a) \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappeler la formule donnant $\sin(2x)$ pour tout réel x et l'appliquer pour $x = \frac{a}{2^{n+1}}$.

On simplifiera les fractions au maximum.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

Si on l'applique à $x = \frac{a}{2^{n+1}}$, on obtient $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

- Initialisation : Pour $n = 1$.

$$\sin(a) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sin(a)}{2 \sin\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Donc, $P(1)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

On utilise la même formule de trigonométrie : $\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}$.

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) &= \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\
 &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\
 &= \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \\
 &= \frac{\sin(a)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}
 \end{aligned}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$