



Devoir Surveillé n°1

19 septembre 2026

– Nombres réels, trigonométrie, récurrences –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.

Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Chaque exercice devra commencer sur une nouvelle copie.

Exercice 1 : Calculs.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre $|2x + 1| \leq 3$.
2. Simplifier : $\frac{8!}{5! \times 3!}$
Rappel : pour tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.
3. Simplifier en rendant le dénominateur rationnel (pas de racine carrée) : $\frac{1}{2\sqrt{2} + 3}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre $2 \sin^2(x) + \sqrt{3} \sin(x) - 3 = 0$

Exercice 2 : Suites et équations de Pell-Fermat.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est un entier strictement positif.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.
4. On définit à présent la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$.

On admet que cette suite est une suite d'entiers.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 - 2v_n^2 = 4(-1)^n$

(b) En déduire que l'équation $x^2 - 2y^2 = 4$ admet une infinité de couples (x, y) de solutions entières.

Une telle équation est un cas particulier d'une famille d'équations appelées "équations de Pell-Fermat" : ce sont les équations d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, du type $x^2 - ny^2 = m$, où n et m sont deux entiers naturels, n n'étant pas un carré parfait.

Exercice 3 : Trigonométrie et équation du troisième degré.

Rappel (formules de trigonométrie) : pour tous réels a et b ,

- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$,
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

(b) Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

(c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

On pourra appliquer le résultat de la question 1a pour une valeur de θ bien choisie.

(d) En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

3. On veut résoudre l'équation :

$$(E) : 8x^3 - 6x - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0.$$

On admet que cette équation admet au plus trois solutions.

- (a) Rechercher les solutions de cette équation sur $[-1, 1]$, en posant $x = \cos(\theta)$. On exprimera les solutions sous forme de cosinus.
- (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.