

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |2x+1| \leq 3 &\iff -3 \leq 2x+1 \leq 3 \\ &\iff -4 \leq 2x \leq 2 \\ &\iff -2 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $[-2, 1]$.

2. $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$, donc $\frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 8 \times 7 = 56$.

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

3. $\frac{1}{2\sqrt{2}+3} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 3-2\sqrt{2}$.

Ainsi, $\frac{1}{2\sqrt{2}+3} = 3-2\sqrt{2}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos^2(x) = \frac{3}{4} &\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ ou } \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. On note (E) cette équation et on pose $X = \sin(x)$.

Donc $(E) \iff 2X^2 + \sqrt{3}X - 3 = 0$. On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 27 > 0$.

Elle a donc deux racines réelles : $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{27}}{4}$ et $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{27}}{4}$.

Or $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$, donc les deux racines sont $-\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (E) &\iff X = -\sqrt{3} \text{ ou } X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \underbrace{\sin(x) = -\sqrt{3}}_{\text{pas de solution car } -\sqrt{3} < -1} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 2

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2u_1 + u_0 = 6$ et $u_3 = 2u_2 + u_1 = 14$.

2. On commence par définir l'hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : u_n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$.

$u_0 = 2$ et $u_1 = 2$ donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.

Montrons que $H(n+2)$ est vraie.

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$. Or, une somme de deux entiers strictement positifs est un entier strictement positif.

Donc, $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*$.

3. On commence par définir l'hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$.

$u_0 = 2$ et $(1 + \sqrt{2})^0 + (1 - \sqrt{2})^0 = 1 + 1 = 2$ donc $H(0)$ est vraie.

$u_1 = 2$ et $(1 + \sqrt{2})^1 + (1 - \sqrt{2})^1 = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.

Montrons que $H(n+2)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + u_n \\ &= 2 \left((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right) + (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \\ &= (1 + \sqrt{2})^n (2 + 2\sqrt{2} + 1) + (1 - \sqrt{2})^n (2 - 2\sqrt{2} + 1) \\ &= (1 + \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^2 \\ &= (1 + \sqrt{2})^{n+2} + (1 - \sqrt{2})^{n+2} \end{aligned}$$

Donc, $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.

4. On mène un raisonnement par récurrence comme à la question 1 avec comme hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n^2 - 2v_n^2 = (u_n - \sqrt{2}v_n)(u_n + \sqrt{2}v_n)$.

On va calculer les deux termes du produits.

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{2}v_n &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n - \sqrt{2} \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n - (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \\ &= 2(1 - \sqrt{2})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n + \sqrt{2}v_n &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n + \sqrt{2} \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \\ &= 2(1 + \sqrt{2})^n \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_n^2 - 2v_n^2 &= 2(1 - \sqrt{2})^n \cdot 2(1 + \sqrt{2})^n \\ &= 4((1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}))^n \\ &= 4(1 - 2)^n \\ &= 4(-1)^n \end{aligned}$$

6. Pour tout entier n pair, le couple (u_n, v_n) est un couple d'entier solution de $x^2 - 2y^2 = 4$.

De plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante à partir du rang $n=1$, les u_n sont deux à deux distincts quand n parcourt $\mathbb{N}^*$.

Donc les couples (u_n, v_n) sont deux à deux distincts.

Donc, cette équation a une infinité de solution.

Exercice 3

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, donc, en utilisant la formule $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$:

$$\boxed{\cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}}.$$

(b) $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$. Puisque la fonction cosinus est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit

$$\text{que } \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0}.$$

(c) On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'après la question précédente, $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{2}$.

Ainsi, $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Il y a donc deux candidats possibles pour la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}.$$

Pour choisir la bonne valeur, il suffit d'utiliser la question précédente : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Pour la seconde inégalité, on raisonne de même sachant que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$. On

trouve $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

(d) On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Appliqué en $\frac{\pi}{8}$ et en $\frac{3\pi}{8}$, on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Ainsi, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

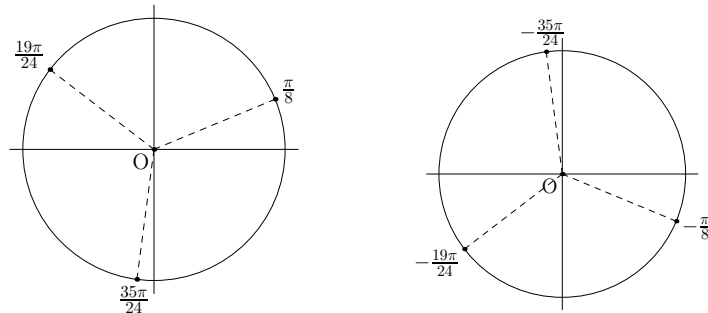
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On écrit $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$ et on utilise une formule de trigonométrie. On exprime ensuite $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ à l'aide des formules de trigonométrie correspondantes. On obtient bien l'égalité recherchée :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$

3. (a) On travaille sur l'intervalle $[-1, 1]$. Tous les nombres de cet intervalle peuvent s'écrire sous la forme d'un cosinus. Donc, $x \in [-1, 1]$ est solution de $8x^3 - 6x - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0$ si, et seulement si, en écrivant $x = \cos(\theta)$, on a $8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0$.

$$\begin{aligned} 8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0 &\iff 2(4\cos^2\theta - 3\cos(\theta)) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0 \\ &\iff 2\cos(3\theta) = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \iff \cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ &\iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &\iff 3\theta = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \text{ ou } 3\theta = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi \\ &\iff \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

On représente alors les valeurs possibles pour θ sur le cercle trigonométrique :



Ainsi, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} x \in [-1, 1] \text{ est solution de } 8x^3 - 6x - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0 \\ \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right). \end{aligned}$$

Remarque. Comme le cosinus est une fonction paire, il n'est pas nécessaire de considérer les autres angles. Ainsi, sur $[-1, 1]$, l'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right), \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right) \right\}.$$

- (b) On a admis que l'équation possède au plus trois solutions. Dans la question précédente, on a trouvé trois expressions pour les solutions. Avant de conclure, il faut s'assurer que ces trois expressions sont bien différentes les unes des autres.

On a $\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{24}\right)$. Par ailleurs, on sait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Comme $0 < \frac{3\pi}{24} < \frac{13}{24} < \frac{19\pi}{24} < \pi$, on en déduit que $\cos\left(\frac{3\pi}{24}\right) > \cos\left(\frac{13}{24}\right) > \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right)$.

Les trois valeurs trouvées auparavant sont donc bien distinctes deux à deux, on connaît donc les trois solutions de l'équation.

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right), \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right) \right\}$.

À l'aide des calculs précédents et des formules de trigonométrie, on peut montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \right\}.$$