

Exercice 1. Traduire en français les phrases mathématiques suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 0$.

| Le carré d'un entier positif est négatif.

2. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^{15} - 45x = 0$.

| L'équation $x^{15} - 45x = 0$ admet au moins une solution.

3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{N}, x \leq y$.

| Il existe au moins un réel qui est inférieur ou égal à tous les entiers positifs.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair.

| Le produit de deux entiers consécutif est un entier pair.

5. $\exists !\heartsuit \in \mathbb{R}$ tel que $\heartsuit^2 + 1 = 0$.

| L'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La somme de deux réels est un entier positif.

| $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{N}$.

2. Pour chaque entier positif, on peut trouver un entier positif supérieur ou égal au premier.

| $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n$.

3. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

| $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$.

4. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

| $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1) \neq f(x_2)$.

5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.

| $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$.

6. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.

| $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$.

7. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

| $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Leftrightarrow n > 2$.

Exercice 3. Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N$.

| $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N$.

2. $\exists ! x \in \mathbb{R}, x = x^2$.

| $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2) \vee (\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2, x_1 = x_1^2 \wedge x_2 = x_2^2)$.

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

| C'est faux. Si on prend $x = 1$ et $y = 2$, on n'a pas $x + y^2 = 1$.

| Donc, l'énoncé est faux.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1.$

| C'est faux. Prenons $x = 2$. Si on suppose la proposition vraie, $\exists y \in \mathbb{R}, 2 + y^2 = 1$.
 | Donc, $y^2 = -1$. C'est absurde.
 | Donc, l'énoncé est faux.

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1.$

| Prenons $x = 2$. On suppose qu'il existe y tel que $2 + y^2 = 1$.
 | Donc, $y^2 = -1$. C'est absurde.
 | Donc l'énoncé est faux.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1.$

| C'est vrai. Prenons $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 5. Par un raisonnement direct, montrer que $\forall x \in [-2, 2], x^2 - 4 \leq 0$.

| Soit $x \in [-2; 2]$. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
 | Or, $x - 2$ est négatif et $x + 2$ est positif.
 | Par produit, $x^2 - 4$ est négatif.

Exercice 6. Par disjonction de cas, montrer que pour tout entier n , l'entier $n(n + 1)$ est pair.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
 Donc, $n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2[k(2k + 1)]$.
 Donc, $n(n + 1)$ est pair.
- Si n est impair : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
 Donc, $n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2[(2k + 1)(k + 1)]$.
 Donc, $n(n + 1)$ est pair.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la phrase suivante :

Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

1. Exprimer la réciproque de la propriété initiale.
2. Exprimer la contraposée de la propriété initiale.
3. Démontrer la contraposée.
4. Qu'en déduit-on ?

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si n est pair alors $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8.
2. Si n n'est pas pair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
3. On suppose que n est impair.
 Donc, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
 Donc,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k(k + 1) \end{aligned}$$

Or, $k(k + 1)$ est un multiple de 2 donc $4k(k + 1)$ est un multiple de 8.
 Donc, $n^2 - 1$ est divisible par 8.

4. Une implication et sa contraposée ont la même valeur logique.

On a démontré que la contraposée est vraie donc la propriété initiale est vraie aussi.

Exercice 8. [*] Démontrer, par l'absurde, qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ à la fois pair et impair.

Donc, $\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k_1$ et $n = 2k_2 + 1$. Donc, $k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$.

C'est absurde car $k_1 - k_2$ est un entier.

Donc, un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

Exercice 9. [*] Montrer, par analyse-synthèse, qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

On raisonne par analyse et synthèse.

• Analyse : On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

$$\text{Donc,} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{Donc,} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad 1 = (a+b)x + 2a - b$$

$$\text{Donc, par identification,} \quad \begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = 2a - b \end{cases}$$

$$\text{Donc,} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Synthèse : On vérifie que les valeurs obtenues à la fin de l'analyse conviennent.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} = \frac{1/3(x+2) - 1/3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

On a bien trouvé un couple de réels qui convient.

Exercice 10. [*]

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$.

2. Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

1. voir cours.

2. On raisonne par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\text{Donc, } p = \sqrt{2}q$$

$$\text{Donc, } p^2 = 2q^2$$

Or, si un entier au carré est pair alors l'entier est pair (voir q1)

$$\text{Donc, } \exists k \in \mathbb{Z}, p = 2k$$

$$\text{Donc, } \exists k \in \mathbb{Z}, 4k^2 = 2q^2$$

$$\text{Donc, } \exists k \in \mathbb{Z}, 2k^2 = q^2$$

$$\text{Donc, } \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z}, p = 2k \text{ et } q = 2\tilde{k}$$

$$\text{Donc, } \text{pgcd}(p, q) \neq 1$$

C'est absurde. Donc $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 11. [**] Démontrer, par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini.

On raisonne par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers (on le note $\mathbb{P}$) soit fini.

Alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{P}^n$, tel que $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Notons $N = \prod_{k=1}^n p_k + 1$. N est un entier supérieur ou égal à 2.

- Si N est premier, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, N = p_i$. Or, $N > p_i$ donc c'est absurde.
- Si N n'est pas premier, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i$ divise N .

Or, p_i divise $\prod_{k=1}^n p_k$ donc, par somme, p_i divise 1. C'est absurde.

Donc, l'ensemble des nombres premiers est infini.