

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes.

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = e^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3xe^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)e^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
10. $f(x) = e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x+5}{x^2+1} = \frac{x(1+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x^5-x}{x^2-1} = x^3 \cdot \frac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $e^x - 2x + 1 = e^x \left(1 - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$.
Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3xe^{-x^2} = 3 \cdot \frac{-x^2 e^{-x^2}}{-x}$.
Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 e^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
 $\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}) = 0}$.
7. On applique la même méthode.
 $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 1}$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
 $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\cos(5x)e^{-3x}| \leq e^{-3x}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(5x)e^{-3x} = 0}$.
9. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\sin(x)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \left| \frac{x \sin(x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} = 0}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq x - \sin(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} \leq e^{x-\sin(x)}$ par croissante sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty}$.

Exercice 2 Après avoir donné leur ensemble de définition et justifié leur dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x\mathbf{e}^{-x^2}$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x)$.
3. $f(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{x^2 + 3}$.
4. $f(x) = \frac{1 + \sin(2x)}{\cos(x) - 3}$.
5. $f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$.
6. $f(x) = \ln(2 + \cos(x))$.
7. $g(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.
8. $h(x) = \sqrt{1 + \ln(1 - x)}$.
9. $l(x) = \ln(\ln(x))$.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathbf{e}^{-x^2} + x \cdot (-2x)\mathbf{e}^{-x^2} = (1 - 2x^2)\mathbf{e}^{-x^2}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x)$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x(x^2 + 3) - \mathbf{e}^x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 3)\mathbf{e}^x}{(x^2 + 3)^2}$$

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{2 \cos(2x)(\cos(x) - 3) - (1 + \sin(2x)) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x) - 3)^2} \\ &= \frac{2 \cos(2x) \cos(x) - 6 \cos(2x) + \sin(x) - \sin(2x) \sin(x)}{(\cos(x) - 3)^2} \end{aligned}$$

5. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ et la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, la fonction $u : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\frac{2x}{1 + x^2} \cdot x - \ln(1 + x^2)}{x^2} = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 2 + \cos(x) > 0\}$. Or,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, -1 &\leq \cos(x) \leq 1 \\ , 1 &\leq 2 + \cos(x) \leq 3 \end{aligned}$$

donc $D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, 3]$ et d'une fonction dérivable sur $[1, 3]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x) \times \frac{1}{2 + \cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

7. $D_g = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

8.

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R}, 1 - x > 0 \text{ et } 1 + \ln(1 - x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } \ln(1 - x) \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } 1 - x \geq e^{-1}\} = \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } x \leq 1 - e^{-1}\} \\ D_h &=]-\infty, 1 - e^{-1}] \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $] - \infty, 1 - e^{-1}[$ comme composée de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(1 - x)$ dérivable sur $] - \infty, 1 - e^{-1}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in] - \infty, 1 - e^{-1}[, h'(x) = \frac{-1}{1 - x} \times \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln(1 - x)}} = \frac{1}{2(x - 1)\sqrt{1 + \ln(1 - x)}}$$

9. $D_l = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } x > 1\} =]1, +\infty[$.

La fonction l est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, l'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

Remarque : Ceci nous dit aussi que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $g : x \mapsto \frac{2x^3 - 2x - 1}{x^3 - 1}$

1. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction g .

Correction On est face à une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va modifier l'écriture de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 1, g(x) = \frac{x^3(2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} = \frac{2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ donc par somme et quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

On a également $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de g .

2. Déterminer la position de la courbe représentative de g par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

Correction Pour avoir la position de la courbe par rapport à son asymptote, on doit étudier le signe de la quantité $g(x) - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 1, g(x) - 2 = \frac{-2x + 1}{x^3 - 1}$$

On construit alors le tableau de signe du quotient.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x + 1$	+	0	-	-
$x^3 - 1$	-	-	0	-
$g(x) - 2$	-	+		-

Donc, la courbe représentative de g est au-dessus de la tangente sur $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ et en-dessous sur $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[\cup] 1, +\infty[$.

Exercice 4 Pour chacune des fonctions, étudier la parité et donner son intervalle d'étude.

1. $x \mapsto \ln(|x|)$.

Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(|-x|) = \ln(|x|)$.

Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

2. $x \mapsto \sin(x^2)$.

Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin((-x^2)) = \sin(x^2)$.

Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

3. $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$.

Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3 - x} = \frac{x^2 - 1}{-(x^3 + x)} = -\frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$.

Donc la fonction est impaire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier la monotonie de $f + g$.

Correction Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.

Donc, par croissance de f et de g , $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.

Donc, $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$ par addition d'inégalités.

Donc $f + g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Si f et g sont à valeurs positives, étudier la monotonie de $f \times g$.

Correction On suppose maintenant que f et g sont à valeurs positives.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.

Donc, par croissance de f et de g , $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.

Donc, $f(x).g(x) \leq f(y).g(y)$ par produit d'inégalités.

Donc fg est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la fonction $g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$

Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2 > 0\}$.

Or, $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$ donc $D_{g \circ f} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[, g \circ f(x) = \ln(x^2 - 2).$$

2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2x + 3 > 0\}$.

Or, $\Delta > 0$ et $f(0) = 3$ donc f est toujours strictement positive.

Donc, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

3. $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ et $g(x) = x + \frac{1}{x}$.
Correction $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}^*$.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \frac{2x-1}{x} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, (g \circ f)(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{2x-1}{x} + \frac{x}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2 + x^2}{x(2x-1)} = \frac{5x^2 - 4x + 1}{x(2x-1)}$$

Exercice 7 On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 0$ des fonctions f et g sont parallèles.

Correction Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Donc, $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$.

Les tangentes en 0 ont donc le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

2. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 1$ sont sécantes.

Correction $f'(1) = 1$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de f est $y = (x-1) + \frac{3}{2}$.

$g'(1) = \frac{-1}{2}$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de g est $y = \frac{-1}{2}(x-1) + 1$.

On cherche un point d'intersection entre les deux droites.

$$(x-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Donc les deux tangentes sont sécantes en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$.

Correction

Exercice 8 Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ?

Correction La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est paire donc on peut les étudier sur $[0; +\infty[$.

2. Déterminer les variations de la fonction f .

Correction La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

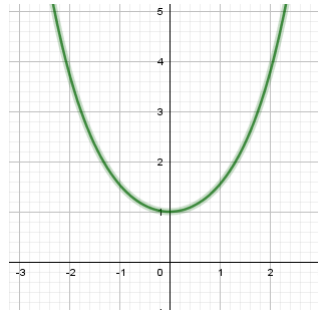
On étudie ensuite le signe de la dérivée. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Finalement, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

3. Calculer les limites de f aux bords de son ensemble de définition et tracer son graphe.

Correction Par somme de limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par parité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.



Exercice 9 Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g .

Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? On notera cet ensemble $\mathcal{D}$.

Correction $D_g = \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction g est impaire et π -périodique. On peut réduire l'ensemble d'étude à $\mathcal{D} = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathcal{D}$.

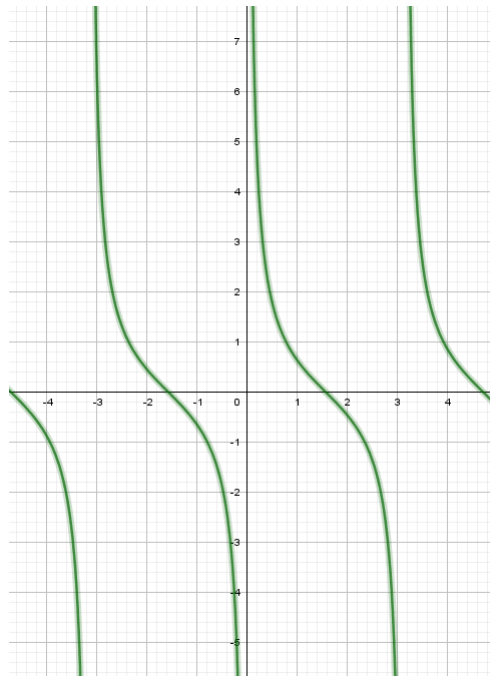
Correction La fonction g est dérivable sur D_g comme quotient de deux fonctions dérivables sur D_g avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

La fonction g est décroissante sur $\mathcal{D}$.

3. Calculer les limites de g aux bords de $\mathcal{D}$ et tracer son graphe.

Correction Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.



Exercice 10 Résoudre les équations suivantes.

1. $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$.

Correction $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$ est équivalente à $2X^2 - 5X + 2 = 0$ avec $X = e^{2x}$. Résolvons cette équation.

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$. Il y a donc 2 racines réelles : $X_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ ou $X_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
Cela donne deux valeurs possibles pour x : $x_1 = \frac{1}{2} \ln(2)$ ou $x_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln(2)}{2}$.

2. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$.

Correction Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4e^x \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0$ où $X = e^x$.

$\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$. Il y a donc deux racines réelles : $X_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ou $X_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Finalement, il y a deux solutions pour x : $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_2 = \ln(2 - \sqrt{3})$.

3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Correction Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{x \ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x})$ car $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Donc, 1 et 4 sont les solutions.

4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction On va modifier l'écriture de cette équation :

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \\ 2^{2x} \times \frac{3}{2} &= 3^x \times \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} &= \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \text{ Or, la fonction } x \mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc} \\ 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \text{ donc } x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 11 Etudier en détail les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

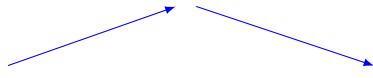
Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$.

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

Cette dérivée s'annule en $x = e$. Elle est positive sur $]0; e]$ et négative sur $]e; +\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	-
$f(x)$	$\parallel$		

(c) Calculons les limites. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $e^0 = 1$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$f(e) = e^{\frac{\ln(e)}{e}} = e^{\frac{1}{e}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	-
$f(x)$	$\parallel$	$e^{\frac{1}{e}}$	1

2. $x \mapsto (x+1)^x$.

Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto (x+1)^x = e^{x \ln(x+1)}$.

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$.

(b) La fonction $x \mapsto x \ln(x+1)$ est définie sur $] -1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$. Par composition avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right] e^{x \ln(x+1)}$$

On veut étudier le signe de $g : x \mapsto \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

Cette fonction est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $] -1, +\infty[$. Elle ne s'annule donc qu'une seule fois. Or, $g(0) = 0$ donc f' ne s'annule qu'en 0.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	-	+
$f(x)$	$\parallel$		

(c) Calculons les limites. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(0) = e^0 = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	-	+
$f(x)$	$\parallel$	1	$+\infty$