Corrigé du devoir maison n° 1

— Méthodes de calculs —

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

   (a) $S = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2) = \sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3.\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1).$

   $S = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{3n}{2} + 2\right] = \boxed{\frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3}}$.

   (b) $S = \sum_{k=n}^{2n} x = (2n-n+1)x = \boxed{(n+1)x}$.

   (c) $S = \sum_{k=0}^{n} 6(x^k-2) = 6\sum_{k=0}^{n}x^k - 12\sum_{k=0}^{n}1 = \boxed{6.\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 12(n+1)}$.

   (d) $P = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}.\frac{k+1}{k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+2}{2}.\frac{n+1}{1} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

   (e) $S = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{4^{n-k}} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k.x^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(4x)^k = \frac{1}{4^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(4x)^k - 1\right] = \boxed{\frac{(4x+1)^n-1}{4^n}}$.

2.
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}2^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2^i.\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2^i-2^i.2^{n-i+1}}{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n}2^i = n.2^{n+1} - 2.\frac{1-2^n}{1-2} = n2^{n+1} + 2 - 2^{n+1}\end{aligned}$$

   Donc, $\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = 2 + (n-1)2^{n+1}}$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a)
   $$\sin^3(\theta) = \sin^2(\theta).\sin(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.\sin(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \cos(2\theta)\sin(\theta)}{2}$$

   Or, $\sin(\theta)\cos(2\theta) = \frac{\sin(3\theta)+\sin(-\theta)}{2}$. Donc,
   $$\sin^3(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \frac{\sin(3\theta)-\sin(\theta)}{2}}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{\sin(3\theta)}{4} + \frac{\sin(\theta)}{4}$$

   Finalement, $\boxed{\sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}$.

   (b) On applique la formule précédente avec $x = \frac{\theta}{3^k}$.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}3^k\sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4}\left[3\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{3^k}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[3^{k+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - 3^k\sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3^1\sin\left(\frac{\theta}{3^{1-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3\sin(\theta)\right]}$.

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right)$.

1. On suppose que $a = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + 1^{2^k}) = \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$. Donc, $\boxed{P_n = 2^{n+1}}$.

2. On suppose maintenant que $a \neq 1$.

   (a) $P_1 = \prod_{k=0}^{1}\left(1 + a^{2^k}\right) = (1 + a^{2^0})(1 + a^{2^1}) = (1 + a)(1 + a^2)$.
   $P_2 = \prod_{k=0}^{2}\left(1 + a^{2^k}\right) = (1 + a^{2^0})(1 + a^{2^1})(1 + a^{2^2}) = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$.

   (b) $(1 - a)P_1 = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2) = (1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4$. Donc, puisque $a \neq 1$, $\boxed{P_1 = \frac{1 - a^4}{1 - a}}$.

   (c) $(1 - a)P_2 = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4) = (1 - a^4)(1 + a^4) = 1 - a^8$.
   Donc, puisque $a \neq 1$, $\boxed{P_2 = \frac{1 - a^8}{1 - a}}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$P_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1 + a^{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right).(1 + a^{2^{n+1}}) = P_n.(1 + a^{2^{n+1}})$$

   Donc, $\boxed{P_{n+1} = (1 + a^{2^{n+1}}).P_n}$.

   (e) On raisonne par récurrence.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H(n) : P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$.

   I Pour $n = 0$:
   $\prod_{k=0}^{0}\left(1 + a^{2^k}\right) = 1 + a^{2^0} = 1 + a$.
   $\frac{1 - a^{2^{0+1}}}{1 - a} = \frac{1 - a^2}{1 - a} = \frac{(1 + a)(1 - a)}{1 - a} = 1 + a$.
   Donc, $H(0)$ est vraie.

   H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ soit vraie.

   $$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1 + a^{2^{n+1}}).P_n \text{ par la question précédente.} \\ &= (1 + a^{2^{n+1}}).\frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= \frac{1 - (a^{2^{n+1}})^2}{1 - a} \\ &= \frac{1 - a^{2.2^{n+1}}}{1 - a} \\ &= \frac{1 - a^{2^{n+2}}}{1 - a} \end{aligned}$$

   Finalement, $H(n+1)$ est vraie.

   C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$.