Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes.
   (a) $3+4+5+6+7+8+9+10$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. $1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}$.
   (c) $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times 2n$
   (d) $1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)$
2. Ecrire les sommes et produits suivants en extension.
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 2k$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k$.
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.
   (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1$.

Correction

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} k = \sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^{2} k = \frac{10\times 11}{2} - 3 = 52.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (a^2)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(a^2)^{n+1}}{1-a^2} \text{ si } a^2 \neq 1 \\ n+1 \text{ si } a^2 = 1 \end{cases}$

   (c) C'est le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$ donc
   $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times 2n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!.$

   (d) C'est le produit de tous les nombres impairs plus petits que $(2n+1)$ donc
   $1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1).$
   C'est aussi le produit de tous les nombres plus petits que $(2n+1)$ divisé par le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$
   $$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{2n+1} k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

2. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 2k = 2+4+6+\cdots+22+24.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k = 2+4+8+\cdots+2^{2n-1}+2^{2n}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 1\times 0+2\times 1+3\times 2+\cdots+(n-1)(n-2)+n(n-1).$

   (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 = 1\times\times\cdots\times 1\times 1.$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les quantités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1).$

Correction

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.
2. $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = 3\sum_{k=4}^{n+1} k + 7\sum_{k=4}^{n+1} 1 = 3\frac{(n+1-4+1)(n+1+4)}{2} + 7(n+1-4+1)$
$= \frac{3(n-2)(n+5)}{2} + 7(n-2) = \frac{(n-2)(3n+29)}{2}$.
3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{2(1-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^n}$ donc $\lim\limits_{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \lim\limits_{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$.
4. $\prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^k = \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^k = n!.\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} k} = n!\mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
5. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{6}(n(2n+1)+3n)$
$= \frac{n+1}{6}.(2n^2+4n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Correction

1. On raisonne par analyse-synthèse.

   A Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

   Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$.
   Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 = a(k+1)+bk = (a+b)k + a$.
   Par identification, $a = 1$ et $a + b = 0$.
   Donc, $a = 1$ et $b =_1 =$.

   S Posons $a = 1$ et $b = -1$.
   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

   Donc, il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.
   On reconnait une somme télescopique.
   $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Correction

Exercice 4. Soit $(q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants.

1. $\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q)$
2. $\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ *Pensez à* $k = k+1-1$.
4. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Correction

1. $\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q) = \sum_{k=1}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) = q - q^{n+1}$.
2. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)k! - k!] = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$.
4. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}$.
   $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$.

1. Calculez S.
2. En repartant de la définition de S, donnez-en une autre expression.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Correction

1. $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = (n+1)^4 - 1$ par la formule des sommes télescopiques.
2. Par linéarité de la somme, $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = \sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}$
3. Notons $S = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

   D'après la question précédente, $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$.

   Ainsi,

$$\begin{aligned} 4S &= (n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - n \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

   Finalement, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

1. A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.

   Correction $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$.

2. Calculez $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

   Correction $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{x}{2^k})}$.
   On reconnait un produit télescopqiue. Donc,
   $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2^n})}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation suivante.

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

Correction
$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = \frac{6n + 3n(n-1) + (n-2)(n^2-n)}{6} = \frac{n^3+5n}{6}$.
Donc l'équation à résoudre est $n^3 + 5n = 20n$ c'est à dire $n(n^2-25) = 0$.
On cherche une solution strictement positive donc $n = 5$ est la seule solution au problème posé.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 3^{i-1}$.
4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{2^i}$

Correction

1. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n$.
2. $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}$
3. $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 3^{i-1} \times 1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} - \underbrace{1}_{i=0}\right]$
   $= \frac{(3+1)^n - 1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}$.
4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{2^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \times 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \times 1^{n-i} - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{i=n} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}$
   $= \frac{3^n - 1}{2^n}$.

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculez $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.

   Correction $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = 2^{n-1}$.

2. Soit $1 \leq k \leq n$. Démontrez que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   Correction $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k\textbf{-1+1})!}$

$= n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

   Correction $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{n-1} n\binom{n-1}{l} = n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} = n2^{n-1}$.

4. [∗] Calculer $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

   Correction Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

   $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{k+1}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

   $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l} = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l} - \binom{n+1}{0}\right]$

   $= \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

Exercice 10.

1. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$?

   Correction Par le binôme de Newton, $(a-b)^6 = \sum_{l=0}^{6}\binom{6}{l}a^l(-b)^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l = 2$,

   c'est-à-dire $(-1)^2\binom{6}{2} = 15$.

2. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

   Correction Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^{9-k}(2c)^k$.

   On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k = 3$ c'est à dire $\binom{9}{3}2^3(a-b)^6$.

   Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.

   Ce coefficient est donc $\binom{9}{3}2^3\binom{6}{2} = 10080$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les sommes doubles suivantes sous forme de deux sommes puis les calculer.

1. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} 1$
2. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} j$
3. $\sum_{1\le i\le j\le n} 1$
4. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} ij$
5. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} (i+j)^2$

Correction

1. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$.
2. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{n(n+1)}{2} = n\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

3. $\sum_{1\le i\le j\le n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(n-i+1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i \text{ et } n} = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i) = \sum_{i=1}^{n}(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i$
$= (n+1)n - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)n}{2}.$

4. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

5. $\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2.$
   - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{formule sur les carrés}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Finalement,
   $\sum_{1\le i,j\le n}^{n} (i+j)^2 = 2.\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{2n^2(n+1)(2n+1)+3n^2(n+1)^2}{6}$
   $= \frac{n^2(n+1)[2(2n+1)+3(n+1)]}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$

Exercice 12. [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit $P = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}$ et $I = \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $P+I$ et $P-I$.
   Correction On remarque d'abord que P correspond en fait à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair inférieur à n et I correspond à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair inférieur à n. Ainsi, $I+P = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} = 2^n$.
   De plus, $P-I$ correspond donc à la somme des $\binom{n}{k}$ avec un signe positif lorsque k est pair et négatif sinon.
   Donc, $P-I = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k} - \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1} = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l} = 0.$
2. En déduire I et P.
   Correction On a donc le système suivant : $\begin{cases} P+I = 2^n \\ P-I = 0 \end{cases}$. Donc, $P = I = 2^{n-1}$.

Exercice 13. [*] Soit $(a,b,n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. On pose $A_n = (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n}$.

1. Exprimez A_n sous forme de somme.
   Correction On applique le binôme de Newton aux 2 termes de la somme :

$$\begin{cases} (a-b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k(-b)^{2n-k} \\ (a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k b^{2n-k} \end{cases}$$

Donc, $(a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k b^{2n-k}[(-1)^{2n-k}+1]$.

Or, $(-1)^{2n-k}+1=\begin{cases}0 \text{ si } k \text{ est impair}\\ 2 \text{ si } k \text{ est pair.}\end{cases}$

Finalement, il ne reste que les indices k pairs dans la somme c'est à dire quand $k=2p$ avec $0\leq p\leq n$.

Donc, $(a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}a^{2p}b^{2n-2p}\times 2=2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(a^2)^p(b^2)^{n-p}$.

2. En déduire que le réel $s_n=(1-\sqrt{2})^{2n}+(1+\sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.
Correction Pour calculer s_n , on applique la formule avec $a=1$ et $b=\sqrt{2}$.

$$s_n=2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(1^2)^p(\sqrt{2}^2)^{n-p}=2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}2^{n-p}$$

C'est bien un entier naturel pair.