

Corrigé du devoir surveillé n° 2

— 10 octobre 2026—

Exercice 1 – Logique.

1. (a) $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall m \in \mathbb{Z},\ n \geq m$.
   (b) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   (c) $\exists\, (x, y) \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq g(y)$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$.

2. Soient P et Q deux phrases mathématiques.
   (a) $P \Rightarrow Q$ signifie $\boxed{\text{NON}(P) \text{ ou } Q}$.
   (b) La négation de $P \Rightarrow Q$ est $\boxed{P \text{ et NON}(Q)}$.

3. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On s'intéresse à la phrase mathématique suivante :
   si n et m ne sont pas divisibles par 3 alors leur produit nm n'est pas divisible par 3.
   (a) Dans la division euclidienne apr 3, les restes possibles sont 0,1 ou 2.
   Si le reste vaut 0, c'est que n est divisible par 3.
   Si le reste vaut 1 ou 2, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.
   Donc, $\boxed{\text{si } n \text{ n'est pas divisible par 3 alors } n = 3k + 1 \text{ ou } n = 3k + 2 \text{ avec } k \in \mathbb{N}}$.
   (b) On veut démontrer une implication.
   On suppose que n et m ne sont pas divisibles par 3. Il y alors 4 cas possibles.
   i. $\exists\, (k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 1$.
   ii. $\exists\, (k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 2$.
   iii. $\exists\, (k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 1$.
   iv. $\exists\, (k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 2$.
   On se place dans le premier cas.

$$\begin{aligned} nm &= (3k+1)(3l+1) \\ &= 9kl + 3k + 3l + 1 \\ &= 3(3kl + k + l) + 1 \end{aligned}$$

   Donc, nm n'est pas divisible par 3.
   On se place dans le deuxième cas.

$$\begin{aligned} nm &= (3k+1)(3l+2) \\ &= 9kl + 6k + 3l + 2 \\ &= 3(3kl + 2k + l) + 2 \end{aligned}$$

   Donc, nm n'est pas divisible par 3.
   Par symétrie, le cas 3 est le même que le cas 1.
   On se place dans le dernier cas.

$$\begin{aligned} nm &= (3k+2)(3l+2) \\ &= 9kl + 6k + 6l + 4 \\ &= 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1 \end{aligned}$$

   Donc, nm n'est pas divisible par 3.
   Finalement, le produit nm n'est jamais divisible par 3 et on a bien démontré l'implication demandée :
   $\boxed{\text{si } n \text{ et } m \text{ ne sont pas divisibles par 3 alors leur produit } nm \text{ n'est pas divisible par 3.}}$

Exercice 2 : .

1. (a) On raisonne par double implication.
   On suppose que $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$.
   On applique la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où : $\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \leqslant \sqrt{4^2}$.
   Or les nombres $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ et 4 sont positifs, donc $\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{4^2} = 4$.
   Donc $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.
   Réciproquement, on suppose que $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.
   Ces nombres étant positifs, on peut appliquer la fonction carré, croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$.
   Ainsi, on a prouvé que $\boxed{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2 \iff \sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4}$.

   (b) On s'intéresse à l'inégalité de gauche.
   $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$.
   Or, $\sqrt{3} \leq 2$ donc $8 + 4\sqrt{3} \leq 16$.
   Donc, $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$.
   Par équivalence, $\boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4}$.

   (c) Par la question précédente, on obtient que $0 \leq \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \leq 1$.
   Or, la fonction cosinus restreinte à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ prend toutes les valeurs du segment $[0;1]$
   (on dit qu'elle est surjective).
   Donc, $\boxed{\text{il existe un réel } \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

2. On applique une des formules de trigonométrie donnant l'angle double.

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= 2(\cos(\alpha))^2 - 1 \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - 1 \\
&= 2\frac{8+4\sqrt{2}}{16} - 1 \\
&= \frac{8+4\sqrt{3}-8}{8} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

   Donc, $\boxed{\cos(2\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

3. $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $2\alpha \in [0;\pi]$.
   Donc, $2\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Donc, $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{12}}$.

4. Nous savons que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
   Donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.
   Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin\alpha = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.
   Or, $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(\alpha) \geqslant 0$. Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.
   De plus, $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.
   Puisque $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > 0$, on en déduit que $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Donc $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

5. On reconnaît les numérateurs des valeurs de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ donc on factorise par 4.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2 &\iff \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\cos x + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\sin x = \frac{2}{4} \\
&\iff \cos(\alpha)\cos(x) + \sin(\alpha)\sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos(x-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{12} + 2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Exercice 3 : Autour des ensembles.