

Devoir Surveillé n°2

Samedi 10 octobre 2026

– Trigonométrie, logique, ensembles et fonctions. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.
Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être mis en valeur.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 : Logique.

1. Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes.
   (a) Il existe un entier supérieur à tous les autres.
   (b) Une fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   (c) Une fonction g n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
   (d) Tous les réels sont strictement supérieurs à leur carré.
2. Soient P et Q deux phrases mathématiques.
   (a) Rappeler la définition de $P \Rightarrow Q$.
   (b) Quelle est la négation de $P \Rightarrow Q$?
3. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. On s'intéresse à la phrase mathématique suivante :
   si n et m ne sont pas divisibles par 3 alors leur produit nm n'est pas divisible par 3.
   (a) Justifier que si n n'est pas divisible par 3 alors il est de la forme $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En utilisant une disjonction de cas (4 situations à envisager), montrer la propriété initiale.

Exercice 2 : .

1. (a) Justifier que l'assertion suivante est vraie :
   $$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2 \iff \sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$$
   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer $\cos(2\alpha)$.
3. En déduire α.
4. Montrer que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

Exercice 3 – Autour des ensembles.

Les questions sont indépendantes.

1. Représenter $[1;5] \times [-2;+\infty[$.
2. Donner la définition par extension de l'ensemble $E = \{-1;2\}^3$.
3. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 4x - y = 1\}$ et $F = \{(t+1, 4t+3),\ t \in \mathbb{R}\}$.
   Montrer que $E = F$.
4. On pose $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
   Montrer que A est borné et déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A.
5. Soit E un ensemble. On définit une nouvelle opération Δ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ tel que } x \notin A \cap B\}.$$

   (a) Représenter $A\Delta B$.

   (b) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta E$, $A\Delta \overline{A}$ et $A\Delta \varnothing$.

   (c) Exprimer $A\Delta B$ avec les opérations vues en cours.