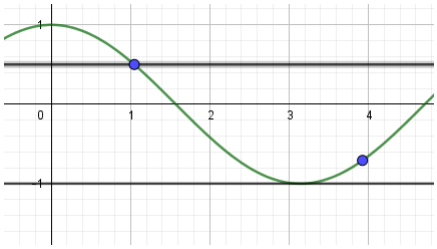
Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

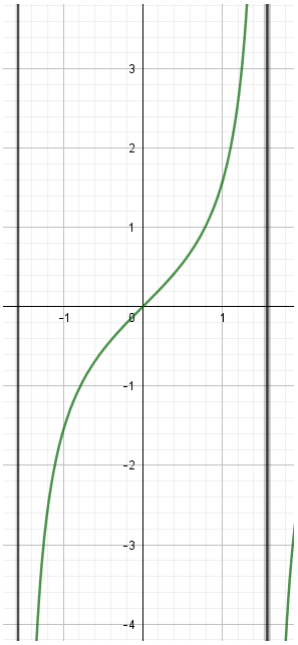
1. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]\right)$.
2. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right]\right)$.
3. $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
4. $\ln([1,\mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e},+\infty[)$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)$.
6. $f([-5,1])$ pour $f : x \mapsto x^2$.

Correction

1. La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
2. Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



   On en déduit que $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right]\right) = \left[-1,\frac{1}{2}\right]$.
3. Le graphe de la fonction tangente est le suivant



   La fonction tangente est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x) = +\infty$.

   On en déduit que $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.
4. $\ln([1,\mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e},+\infty[) = [0,1[\cup[\ln(2e),+\infty[$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*) =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
6. $f([-5,1]) = ([0,25])$.

Exercice 2 Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.

1. $f(x) = |\sin(x)|$

2. $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

On pourra, plus tard, étudier le caractère bijectif de ces fonctions et la bijection réciproque lorsqu'elle existe.

Correction

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Par composée avec la fonction valeur absolue, on obtient que $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Donc, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
La fonction f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}\,,\ f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+4)^2}$.
On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	0

On en déduit que $f(D_f) = \mathbb{R}^*$.

   (c) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 4$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$.

2. On peut étudier la bijectivité des deux dernières fonctions à l'aide du théorème de la bijection.
   (a) $f(0) = f(\pi)$ donc 0 admet au moins deux antécédents par la fonction f.
Donc, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

   (b) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, -2[$ donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de $]-\infty, 2-2[$ dans $]-\infty; 0[$.
De même, elle est bijective de $]-2, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.

   (c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de $]-\infty, 2]$ dans $[-1, +\infty[$.
De même, elle est bijective de $[2, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.
Finalement, f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dans $\mathbb{R}^*$.
Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$$\begin{aligned} .f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2x+4} = y \\ &\Leftrightarrow 2x + 4 = \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{y} - 4 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 4\right) \end{aligned}$$

Donc, la bijection réciproque est

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\ y & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 4\right) \end{array} \right.$$

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

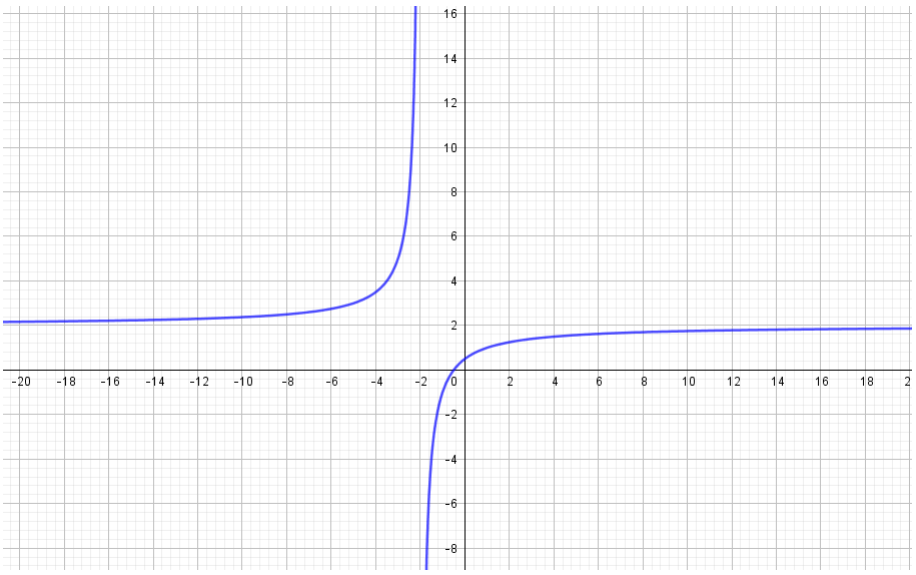
1. Déterminer son ensemble de définition D_h.
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$ et donner sa bijection réciproque.

Correction

1. $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
2. On va étudier les variations de h.
   La fonction h est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in D_h,\ h'(x) = \frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

   Donc, h est strictement croissante sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 2$
   On en déduit que $h(D_h) =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.



3. Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} = y &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x+2) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = 2y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{2-y} \end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{2y-1}{2-y} = -2 \Leftrightarrow 2y-1 = -4+2y \Leftrightarrow 1 = 4$. Donc, $\dfrac{2y-1}{2-y} \neq -2$.
Donc, $\dfrac{2y-1}{2-y} \in D_h$.
L'équation admet une unique solution dans D_h donc h est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
La bijection réciproque est donnée par la résolution de l'équation précédente.

$$h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\ y \mapsto \dfrac{2y-1}{2-y} \end{cases}$$

Exercice 4

1. On s'intéresse à l'application qui à chaque élève de la classe Bio11 associe son groupe de colles.
   (a) Quel est l'ensemble de départ ? d'arrivée ?
   (b) Cette application est-elle bijective ? injective ? surjective ?
2. On s'intéresse à l'application qui à chaque élève de la classe Bio11 associe une place assise dans la salle C106.
   (a) Quel est l'ensemble de départ ? d'arrivée ?
   (b) Cette application est-elle bijective ? injective ? surjective ?

Correction

1. (a) L'ensemble de définition est l'ensemble contenant les 48 élèves de Bio11. L'ensemble d'arrivée est l'ensemble des entiers de 1 à 16.
   (b) Plusieurs élèves sont associés au même groupe de colles donc cette application n'est pas bijective.
   S'il y a un groupe fantôme, cette application peut ne pas être surjective.
2. (a) L'ensemble de définition est l'ensemble contenant les 48 élèves de Bio11. L'ensemble d'arrivée est l'ensemble des places dans la salle.
   (b) Si la salle contient exactement 48 chaises, l'application est bijective.
   Sinon, elle ne sera pas surjective.

Exercice 5

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
   (a) $f(n) = 2n+1$.
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(\theta) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions.

Correction

1. $D_f = \mathbb{N}$ et $f(D_f) = 2\mathbb{N}+1$.
   Soit $y \in 2\mathbb{N}+1$.

$$2x+1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

   donc l'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}+1$.
2. $D_f = \mathbb{C}$ et $f(D_z) = \mathbb{C}$.
   Soit $y \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = y \Leftrightarrow \overline{z} = y \Leftrightarrow z = \overline{y}$$

   L'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\} = \mathcal{C}(0,1) = \mathbb{U}$.
   (a) Injectivité ? Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\theta) = f(\theta')$.
   donc, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}$ donc $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$
   Donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   (b) Surjectivité ? Soit $y = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\phi} \in \mathbb{U}$.

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \phi + 2k\pi$$

   L'équation admet plusieurs solutions donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   (c) Elle n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Exercice 6

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x, x+y, x+y+z) \end{cases}$
   (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer les antécédents par f de (a,b,c).
   (b) f est-elle bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$?
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x, y^2, z^2) \end{cases}$.
   (a) La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
   (b) Déterminer deux ensembles E et F tels que f soit surjectif de E dans F.
   (c) Déterminer deux ensembles E et F tels que f soit injectif de E dans F.
   (d) Déterminer deux ensembles E et F tels que f soit bijectif de E dans F.

Correction

1. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = x+y \\ c = x+y+z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b-a \\ z = c-a-b \end{cases}$$

   (b) Chaque point de $\mathbb{C}^3$ a un unique antécédent donc f est bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.
2. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y^2 = b \\ z^2 = c \end{cases}$$

   On remarque qu'il y a des contraintes sur b et sur c.
   Par exemple, le système n'a pas de solution si $b = -1$ et $c = -4$. Donc, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Si b et c sont négatifs, le système n'a pas de solution donc f est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
   (c) Si b et c sont positifs, le système a plusieurs solutions donc f est injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$.
   (d) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{b} \text{ ou } y = -\sqrt{b} \\ z = \sqrt{c} \text{ ou } z = -\sqrt{c} \end{cases}$$

Pour n'avoir qu'une solution, on va restreindre l'ensemble de départ.
La fonction f est bijective de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 On note $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z|=1\}$. Soit $f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{U}\\ x\mapsto\dfrac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}\end{array}\right.$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Cette application est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$? surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$?

Correction

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $1-\mathbf{i}x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}$.
   Soit $x\in\mathbb{R}$. $\left|\dfrac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}\right|=\dfrac{|1+\mathbf{i}x|}{|1-\mathbf{i}x|}=1$ donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x)=f(y)$.

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}=\frac{1+\mathbf{i}y}{1-\mathbf{i}y} &\Leftrightarrow (1+\mathbf{i}x)(1-\mathbf{i}y)=(1-\mathbf{i}x)(1+\mathbf{i}y)\\ &\Leftrightarrow 1+xy+\mathbf{i}(x-y)=1+xy+\mathbf{i}(-x+y)\\ &\Leftrightarrow x-y=-x+y\\ &\Leftrightarrow x=y\end{aligned}$$

   donc la fonction f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   Soit $z\in\mathbb{U}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}=z &\Leftrightarrow 1+\mathbf{i}x=z(1-\mathbf{i}x)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{i}x(1+z)=z-1\end{aligned}$$

   Donc, $z=-1$ n'a pas d'antécédent par f. Donc, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Exercice 8 [*] Soient E, F et G trois ensembles.
Soit $f\in\mathcal{F}(E,F)$ et soit $g\in\mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.

Correction Soit $f\in\mathcal{F}(E,F)$ et soit $g\in\mathcal{F}(F,G)$.

1. Supposons la fonction $g\circ f$ injective de E dans G.
   Soit $(x,y)\in E^2$ tel que $f(x)=f(y)$.
   Donc, $g[f(x)]=g[f(y)]$
   Donc, $x=y$ (car $g\circ f$ est injective)
   La fonction f est donc injective dans E dans F.
2. Supposons la fonction $g\circ f$ surjective de E dans G. On veut montrer que g est surjective de F dans G.
   Soit $y\in G$.
   Puisque $g\circ f$ est surjective de E dans G, $\exists x\in E$ tel que $(g\circ f)(x)=y$
   que l'on peut réecrire $g[f(x)]=y$. Or, $f(x)\in F$.
   On notant $z=f(x)$, on a bien : $\exists z\in F$ tel que $g(z)=y$.
   La fonction g est surjective de E dans F.

Exercice 9 [*] Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Correction Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va montrer l'égalité des ensembles par double inclusion.

- $\subset$: Soit $y \in f(A \cup B)$.
  Donc, $\exists\, x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
  Donc, ($\exists\, x \in A$ tel que $y = f(x)$) ou ($\exists\, x \in B$ tel que $y = f(x)$).
  Donc, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.
  Donc, $y \in f(A) \cup f(B)$.
  On en déduit que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
- $\supset$: $A \subset A \cup B$ donc $f(A) \subset f(A \cup B)$.
  De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$.
  On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a montré par double inclusion que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.