Chapitre 1

Assertions mathématiques

Sommaire

Dans ce chapitre, nous introduisons des éléments de logique mathématique, en particulier les quantificateurs et les propositions mathématiques.

On se place dans le cadre d'une logique à deux valeurs : une **proposition** mathématique (ou **assertion**) est soit vraie, soit fausse. Par exemple « Socrate est un homme », « tous les nombres sont plus grands que 1000 », « π est un nombre entier », « il existe des nombres entiers négatifs » etc.

Il faut savoir *traduire* une proposition du langage mathématique au langage courant et vice-versa.

1.1 Les quantificateurs

Pour simplifier l'écriture des **propositions** mathématiques on utilise des symboles appelés **quantificateurs**. Dans cette partie, E désigne un ensemble quelconque, fixé.

Définition 1.1: Notation, quantificateur universel

On définit le quantificateur universel $\forall$ qui signifie « pour tout ». La proposition

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

se lit « pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie ».

Remarque 1.1. $\forall x$ se lit « pour tout x », « quelque soit x » ou encore « pour x quelconque ».

Exemple 1.1.

- Soit la proposition mathématique P : « Tout les nombres entiers naturels sont positifs ». Cette proposition s'écrit mathématiquement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 0.$$

- La proposition mathématique $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $x + y = y + x$ s'écrit en français « L'addition des entiers est commutative ».

Exercice 1.1. Écrire mathématiquement la proposition : le carré de tout nombre réel est positif.

Définition 1.2: Notation, quantificateur existentiel

On définit le quantificateur existentiel $\exists$ qui signifie « il existe ». La proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ se lit « il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie ».

Remarque 1.2.
- $\exists x \in E$ signifie qu'il existe au moins un élément, il peut y en avoir plusieurs.
- La virgule se lit « tel que », on peut aussi écrire $/$ à la place : $\exists x \in E\ /\ P(x)$.

Exemple 1.2.
- La proposition $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 1000$ se lit « il existe un entier naturel supérieur à 1000 ».
- La proposition « Il existe un nombre réel dont le carré est 2 » s'écrit $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$.

Exercice 1.2. Écrire mathématiquement l'assertion « il existe des nombres rationnels négatifs ».

Définition 1.3: Notation, quantificateur d'existence et d'unicité

On définit le quantificateur $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ». La proposition $\exists! x \in E,\ P(x)$ signifie qu'il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple 1.3.
- $\exists! x > 0\ /\ \ln x = 0$ est vraie.
- $\exists! y < 0\ /\ y^2 = 9$ est vraie.

Remarque 1.3.
- On évite de mélanger les phrases en français avec des quantificateurs.
- L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est extrêmement important. Par exemple :
  - $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists! y \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$ signifie que tout nombre réel positif x admet une unique racine carrée positive y ; mais
  - $\exists! y \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\ x = y^2$, signifie qu'il existe un unique nombre positif y qui soit la racine carrée de tous les nombres réels positifs x, ce qui est évidemment faux.
- Quand on écrit $\forall x,\ \exists y$, l'élément y dépend a priori de l'élément x choisi.

Exercice 1.3. Comparez les assertions mathématiques suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ xy = 1$$

et

$$\exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}^\star,\ xy = 1$$

1.2 Opérations sur les propositions mathématiques

Lorsque l'on dispose de deux propositions P et Q, on peut les combiner pour former de nouvelles propositions (qui peuvent-être soit vraies soit fausses).

1.2.1 Connecteurs logiques « et », « ou »

Définition 1.4

Soient P et Q deux assertions. On définit

1. L'assertion « P ou Q », notée $P \vee Q$, qui est vraie si et seulement si P est vraie ou si Q est vraie.
2. L'assertion « P et Q », notée $P \wedge Q$ qui est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.

Exemple 1.4.

1. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0) \vee (2 < 1)$ est vraie.
2. $(\forall y \in \mathbb{R},\ 1 + y \geq y) \wedge (2^2 = 5)$ est fausse.

Remarque 1.4. Attention, en mathématique le *ou* est inclusif, c'est-à-dire que la proposition $P \vee Q$ est vraie si P et Q sont vraies simultanément, contrairement au langage courant, par exemple « fromage ou dessert » est généralement exclusif au restaurant (les deux ne peuvent pas être vraies simultanément).

1.2.2 Négation d'une proposition

Définition 1.5

Soit P une proposition. On définit l'assertion « non P », notée $\neg P$, qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Exemple 1.5.

- $\neg(3 \geq 4)$ est vraie.
- Si $x \in \mathbb{R}$, la négation de la proposition $x \geq 2$ est $x < 2$. Une inégalité large devient stricte quand on passe à la négation, et réciproquement.

Propriété 1.1. *Soit P une proposition. L'assertion $\neg(\neg P)$ est équivalente à l'assertion P.*

Comment ces opérations logiques se comportent-elles lorsqu'on les combine ?

Négation d'une proposition avec quantificateurs

Exemple 1.6.

- Nions la proposition P : « tous les Hommes sont mortels ». Le contraire de P, la proposition $\neg P$ s'écrit « il existe au moins un Homme qui n'est pas mortel ».
- Nions la proposition Q : « certains jours il pleut ». Le contraire de Q s'écrit $\neg Q$:« tous les jours il fait beau ».

Propriété 1.2

Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x \in E$. La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est la proposition

$$\exists x \in E,\ \neg P(x),$$

tandis que la négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est

$$\forall x \in E,\ \neg P(x).$$

En résumé, pour nier une proposition avec des quantificateurs, « on inverse les quantificateurs puis on nie la proposition subordonnée ».

Exemple 1.7. La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$ est $\exists n \in \mathbb{N},\ n \leq 2$.

Exercice 1.4. Traduire en langage courant et nier la proposition $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists x \in \mathbb{Q},\ r = x^2$.

Négation d'une proposition avec connecteurs logiques « et », « ou »

Propriété 1.3

Soient P et Q deux assertions.

1. L'assertion $\neg(P \vee Q)$ est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément fausses : ainsi $\neg(P \vee Q)$ est équivalente à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.
2. L'assertion $\neg(P \wedge Q)$ est vraie si et seulement si au moins l'une des proposition P ou Q est fausse : ainsi $\neg(P \wedge Q)$ est équivalente à $(\neg P) \vee (\neg Q)$.

Exemple 1.8.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de $-5 < x \leq 3$ est $\neg(-5 < x) \vee \neg(x \leq 3)$ soit $(x \leq -5) \vee (x > 3)$.
- La négation de « ce cours est long et difficile » est « ce cours est court ou facile ».

Propriété 1.4. *Soient P, Q et R trois assertions. On a les égalités suivantes :*

- $P \vee Q = Q \vee P$,
- $P \wedge Q = Q \wedge P$,
- $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$,
- $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$,
- $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$,
- $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Démonstration. Ces 6 équivalences se prouvent en dressant les tables de vérité de chacune des propositions et en constatant qu'elles sont égales. □

1.3 Implication, équivalence, contraposée

Définition 1.6 (Implication)**.** Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Rightarrow Q$, et on lit P *implique* Q, définie par : $P \Rightarrow Q$ si et seulement si Q est vraie ou P et Q sont simultanément fausses.

En d'autres termes, $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\neg P) \vee Q$.

Exemple 1.9.
1. L'implication « Socrate est un homme »$\Rightarrow$ « Socrate est mortel » est vraie.
2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, l'implication $n \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq 4$ est vraie.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'implication $x < -10 \Rightarrow x^3 \geq 2$ est fausse.

Propriété 1.5. *Soient P et Q deux assertions. La négation de $P \Rightarrow Q$ est l'assertion $P \wedge \neg Q$.*

Démonstration. L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\neg P) \vee Q$ par définition. Donc $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $\neg((\neg P) \vee Q)$ soit encore à $(\neg(\neg P)) \wedge \neg Q$ donc à $P \wedge \neg Q$, d'après les propriétés précédentes. □

Définition 1.7 (Équivalence)**.** Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$, et on lit P équivaut à Q, définie par

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{si et seulement si} \quad (P \Rightarrow Q \quad \text{et} \quad Q \Rightarrow P).$$

Autrement dit, $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Exemple 1.10.

1. Soient x et y deux réels non nuls. Alors $x = y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1$ est vraie.
2. Soient x et y deux nombres réels. Alors $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est fausse (prendre par exemple $x = -1 = -y$).
3. (Théorème de Pythagore) Soit ABC un triangle. Alors ABC est rectangle en B si et seulement si $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Remarque 1.5.

- En général, pour montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie.
- De même, pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on montre généralement que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Définition 1.8: Conditions nécessaires et suffisantes

Soient P et Q deux assertions.

1. Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante de Q, on dit également que Q est une condition nécessaire de P. En d'autres termes, il suffit que P soit vraie pour que Q le soit également, et il faut que Q soit vraie pour que P le soit.
2. Si P et Q sont équivalentes, on dit P est une condition nécessaire et suffisante de Q (et réciproquement), on note parfois c.n.s.

Définition 1.9 (Contraposée)**.** L'implication $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ est la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$, et ces deux implications sont équivalentes.

Exemple 1.11. La contraposée de l'implication « s'il pleut, alors le sol est mouillé » est l'implication « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas ».