Chapitre 2

Nombres réels

Sommaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés des nombres réels. Pour l'essentiel, il s'agit d'un rappel de notions abordées durant les années de lycée. Nous passons en revue les manipulations d'égalités et d'inégalités ainsi que les propriétés de calcul dans $\mathbb{R}$, les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et en particulier les notions de majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Enfin nous effectuons des rappels concernant la résolution d'équations et d'inéquations du premier et du second degré.

2.1 Introduction : au delà des nombres rationnels

L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ ainsi que celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ apparaissent naturellement avec l'activité humaine de décompte. Équipés de la multiplication et la division, nous construisons l'ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

constitué des nombres admettant une écriture décimale finie ainsi que l'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Exemple 2.1. $1,23456789$ est un nombre décimal, $1/3$ est un nombre rationnel.

Dès l'époque pythagoricienne (V[e] siècle avant J.C), les mathématiciens montrent que la longueur de la diagonale du carré de côté 1, égale à $\sqrt{2}$, est un nombre irrationnel (non rationnel).

Théorème 2.1
$\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.2 Egalités et inégalités

Il existe deux méthodes classiques pour définir rigoureusement l'ensemble des nombres réels, équipé de ses propriétés algébriques. Ces méthodes s'appuient soit sur *les suites de Cauchy de nombres rationnels* soit sur *les coupures de Dedekind* et sont hors du programme de BCPST. Nous rappelons dans cette section les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et des inégalités dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Propriété 2.1. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors $a + c = b + c$ si et seulement si $a = b$. Si de plus $c \neq 0$, alors $ac = bc$ si et seulement si $a = b$.*

Propriété 2.2. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*

Propriété 2.3. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors*

1. *$a + c \leq b + c$ si et seulement si $a \leq b$.*
2. *Si $c \in \mathbb{R}^+$, alors $ac \leq bc$ si et seulement si $a \leq b$.*
3. *Si $c \in \mathbb{R}^-$, alors $ac \leq bc$ si et seulement si $a \geq b$.*
4. *Si $c > 0$, alors $ac < bc$ si et seulement si $a < b$.*
5. *Si $c < 0$, alors $ac < bc$ si et seulement si $a > b$.*

Propriété 2.4 (Règle des signes)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $ab \geq 0$ si et seulement si a et b ont même signe.*

2.3 Les opérations de base

Dans cette section, on rappelle les règles de calcul algébriques dans $\mathbb{R}$ ainsi que les propriétés liées aux manipulations d'égalités et d'inégalités.

2.3.1 Outils algébriques

L'addition et la multiplication de nombres réels ont été étudiées dans les années antérieures, on ne reviendra pas dessus ici.

Définition 2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit par récurrence les puissances entières de x :

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x \quad \text{et} \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$

Si $x \neq 0$, on définit

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Définition 2.2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe un unique $u \in \mathbb{R}^+$ tel que $u^2 = x$. On dit que u est la racine carrée de x, et on note $u = \sqrt{x}$.

Définition 2.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $u \in \mathbb{R}$ tel que $u^3 = x$. On dit que u est la racine cubique de x, et on note $u = \sqrt[3]{x}$.

Exemple 2.2. On a $\sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt[3]{-1000} = -10$.

Propriété 2.5. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$. Nous avons les règles de calcul suivantes :*

$$x^{n+p} = x^n \times x^p, \quad (x^n)^p = x^{n\times p} \quad \text{et} \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

Si x et y sont positifs, alors

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2 = x.$$

Propriété 2.6. *Soient x et $y \in \mathbb{R}^+$, tels que $x < y$ (respectivement $x \leq y$). Alors $x^2 < y^2$ et $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ (respectivement $x^2 \leq y^2$ et $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$).*

Démonstration.
— Montrons que $x^2 < y^2$. Comme $0 \leq x < y$, on a $x^2 \leq yx$ en vertu de la propriété 2.3, et d'après la même propriété $yx < y^2$. On en déduit que $x^2 < y^2$. On raisonne de manière similaire pour le cas de l'inégalité large.
— Montrons que $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Raisonnons par contraposée, et supposons que l'on ait $\sqrt{y} \leq \sqrt{x}$. On en déduit d'après la première partie de la propriété que $y \leq x$. Par contraposition, comme on a supposé que $x < y$, c'est nécessairement que $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. On raisonne de même pour l'inégalité large.

□

2.3.2 Les identités remarquables

Nous rappelons ici les trois célèbres identités remarquables, qui sont à connaître parfaitement et à savoir utiliser pour manipuler des expressions littérales (notamment pour factoriser !).

Théorème 2.2: Identités remarquables

Pour tous a et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Démonstration. Ces identités se démontrent en utilisant les propriétés de distributivité et de factorisation usuelles dans $\mathbb{R}$ et admettent également d'élégantes démonstrations géométriques (faites en classe). □

Remarque 2.1. La *seconde* identité remarquable n'est qu'une adaptation de la première, où l'on a, formellement « remplacé b par $-b$ ».

Exemple 2.3.
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x - 1)^2 = x^2 - 2 + 1.$$
2. Pour tout $(y, z) \in$ '$\mathbb{R}^2$,
$$y^4 - z^2 = (y^2)^2 - z^2 = (y^2 - z)(y^2 + z).$$

2.3.3 La valeur absolue

Définition 2.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 2.4. On a $|3,5| = 3,5$ et $|-\pi| = \pi$.

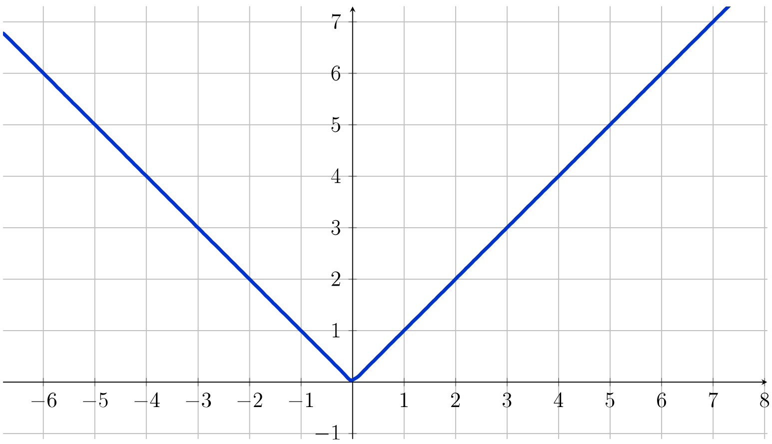

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $x \mapsto |x|$

Propriété 2.7. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les propriétés élémentaires suivantes :*

— $|0| = 0$,

— $|x| \geq 0$,

— $|x| = \max(x, -x)$,

— $|x| = |-x|$,

— $|x| = 0 \iff x = 0$,

— $|x^2| = |x|^2$.

Démonstration. Ces propriétés découlent de la définition. Démonstration faite en classe. □

La propriété suivante est très importante en analyse :

Propriété 2.8. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^+$. $|x| \leq c$ si et seulement si $-c \leq x \leq c$.*

Démonstration. Rappelons que $|x| = \max(x, -x)$ d'après la propriété 2.7. On a $|x| \leq c$ si et seulement si $x \leq c$ et $-x \leq c$. On en déduit que $|x| \leq c$ si et seulement si $x \leq c$ et $x \geq -c$. □

On en déduit la propriété suivante, qui sera utile pour résoudre des inéquations faisant intervenir des valeurs absolues.

Propriété 2.9. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$|x| \leq |y| \iff -|y| \leq x \leq |y|.$$

On a également les propriétés suivantes :

Théorème 2.3
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Alors*

— $|x| = \sqrt{x^2}$,

— $|xy| = |x||y|$,

— $|x + y| \leq |x| + |y|$. *Cette inégalité est appelée l'inégalité triangulaire.*

Démonstration. Pour le premier point : si $x \geq 0$, alors $|x| = x = \sqrt{x^2}$, tandis que si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$, donc $|x| = \sqrt{(-x)^2}$.

Pour le second point, on distingue les cas selon les signes de x et y. Par exemple si $x \geq 0$ et si $y < 0$, alors $xy \leq 0$. Ainsi $|xy| = -xy$, $|x| = x$ et $|y| = -y$. Dans ce cas, $|xy| = |x||y|$. On étend sans difficulté cette preuve aux autres cas.

Pour le troisième point, élevons au carré de part et d'autre. On a d'une part

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

tandis que

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = x^2 + y^2 + 2|x||y|.$$

Comme $xy \leq |xy| = |x||y|$, on en déduit que $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$. Comme par ailleurs $|x + y| \geq 0$ et $|x| + |y| \geq 0$, on déduit que $|x + y| \leq |x| + |y|$ d'après la propriété 2.6 □

Définition 2.5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit la distance de x à y comme $|x - y|$. Graphiquement, c'est la distance sur la droite réelle entre les points d'abscisses respectives x et y. En particulier, $|x|$ représente la distance de x à 0.

Remarque 2.2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x - y| = |y - x|$,
2. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Propriété 2.10. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité triangulaire. En effet

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

□

2.4 Sous ensembles de $\mathbb{R}$

2.4.1 Les intervalles

Dans cette partie, nous commençons par étudier certains célèbres sous-ensembles ainsi que les *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Définition 2.6. On note

- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs,
- $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs,
- $\mathbb{R}^{+\star}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs,
- $\mathbb{R}^{-\star}$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs,
- $\mathbb{R}^{\star}$ l'ensemble des nombres réels non nuls (différents de 0).

Définition 2.7. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$. On note

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$,
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$,
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$,
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$,
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$.

On dit que $[a, b]$ est un intervalle **fermé** tandis que $[a, b[$ est un intervalle **ouvert**.

Remarque 2.3. On étend les définitions ci-dessus au cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$, avec bornes ouvertes en a et b. Ainsi nous avons les caractérisations suivantes :

- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$,
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$,
- $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$,
- $\mathbb{R}^{+\star} =]0, +\infty[$,
- $\mathbb{R}^{-\star} =]-\infty, 0[$.

En revanche, l'ensemble $\mathbb{R}^\star$ des réels différents de 0 n'est pas un intervalle.

Exemple 2.5. Ainsi $[0, 2]$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 2$, tandis que $]-\sqrt{2}, 1]$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $-\sqrt{2} < x \leq 1$. $]-\infty, 1[= \{x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < 1\}$.

D'autre part pour $a \in \mathbb{R}$, $]a, a[= \emptyset$ tandis que $[a, a] = \{a\}$ est le singleton réduit à l'unique élément a.

Propriété 2.11. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On a les équivalences*

$$|x - y| \leq c \Leftrightarrow x \in [y - c, y + c] \quad \textit{et} \quad |x - y| < c \Leftrightarrow x \in]y - c, y + c[.$$

Démonstration. En classe. □

2.4.2 Majorants, minorants, borne supérieure et inférieure, maximum et minimum

Définition 2.8: Majorant, minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

— On dit que A est majoré s'il existe un réel M tel que
$$\forall x \in A,\ x \leq M.$$
On dit alors que M est un majorant de A.

— On dit que A est minoré s'il existe un réel m tel que
$$\forall x \in A,\ x \geq m.$$
On dit alors que m est un minorant de A.

— Si A est à la fois majoré et minoré, on dit que A est borné.

Remarque 2.4. 1. Un ensemble majoré (respectivement minoré) admet une infinité de majorants (respectivement de minorants).

2. A n'est pas majoré si et seulement si
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \quad x > M.$$

Propriété 2.12. *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. A est borné si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que*
$$\forall x \in A,\ |x| \leq C.$$

Démonstration. On raisonne par double implication.

— Supposons que A est borné et montrons qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq C$. Comme A est borné, considérons un majorant M et un minorant m de A. Posons $C = \max(|M|, |m|)$. Alors pour $x \in A$, on a $x \leq M \leq |M| \leq C$ et $x \geq m \geq -|m| \geq -C$. On en déduit que
$$\forall x \in A,\ |x| \leq C.$$

— Réciproquement, supposons qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq C$ et montrons que A est borné. Pour tout $x \in A$, on a $x \leq |x| \leq C$, donc C est un majorant de A, et de même $x \geq -|x| \geq -C$ donc $-C$ est un minorant de A. Ainsi A est majoré et minoré, donc A est borné.

□

Exemple 2.6. —]1,3] est borné.

— $]-\infty, 4]$ est majoré mais n'est pas minoré.

— $\mathbb{Q}$ n'est ni majoré ni borné.

— $\mathbb{N}$ est minoré mais n'est pas majoré.

Théorème 2.4: Maximum, minimum d'un sous-ensemble

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- S'il existe $M \in A$ tel que M est un majorant de A, on dit que M est le maximum (ou le plus grand élément) de A, et il est unique. On note dans ce cas $M = \max(A)$. Autrement dit, M est le maximum de A si et seulement si
$$M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A,\ x \leq M.$$
- S'il existe $m \in A$ tel que m est un minorant de A, on dit que m est le minimum (ou le plus petit élément) de A, et il est unique. On note dans ce cas $m = \min(A)$. Autrement dit, m est le minimum de A si et seulement si
$$m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A,\ x \geq m.$$

Démonstration. On prouve l'unicité du maximum : soit A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et M et M' deux maximums éventuels de A. Comme $M \in A$ et M' majore A, on a $M \leq M'$. De même, $M' \in A$ et M majore A, donc $M' \leq A$. Donc $M = M'$. On procéderait de même pour l'unicité du minimum. □

Remarque 2.5.
- Un sous-ensemble même borné de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum.
- Bien que l'Académie Française recommande l'utilisation des noms *maximum*, *minimum* et *extremum*, on rencontre aussi dans la langue scientifique les mots pluriels de *maxima* et de *minima*, ainsi que d'*extrema*.

Exemple 2.7. On considère les ensembles
$$\begin{aligned} A = [1,2], \quad B =]-\infty, 3], \quad C =]0,4[, \\ D =]1,+\infty[, \quad E = \mathbb{N}, \quad F = \mathbb{R}^{+\star}. \end{aligned}$$

- A est borné et admet comme maximum 2, comme minimum 1.
- B est majoré mais pas minoré et son maximum est 3.
- C est borné mais n'admet ni minimum ni maximum.
- D est minoré, non majoré et n'admet ni minimum, ni maximum.
- E est minoré mais pas majoré, son minimum est 0.
- F est minoré, pas majoré, et n'admet ni minimum ni maximum.

Définition 2.9: Borne supérieure, borne inférieure

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majoré et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on appelle cet élément borne supérieure de A, noté $\sup A$. C'est le plus petit des majorants de A.
- Si A est minoré et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on appelle cet élément borne inférieure de A, noté $\inf A$. C'est le plus grand des majorants de A.

Théorème 2.5: Existence des bornes supérieures et inférieures

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

— Si A est majoré, alors A admet une borne supérieure.

— Si A est minoré, alors A admet une borne inférieure.

Propriété 2.13. *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.*

— *Si A admet un maximum, alors $\max A = \sup A$.*

— *Si A admet un minimum, alors $\min A = \inf A$.*

Exemple 2.8. On considère les ensembles, issus de l'exemple 2.7

$$A = [1, 2], \quad B =]-\infty, 3], \quad C =]0, 4[,$$
$$D =]1, +\infty[, \quad E = \mathbb{N}, \quad F = \mathbb{R}^{+\star}.$$

— A admet 1 comme borne inférieure, 2 comme borne supérieure, 1 comme minimum, 2 comme maximum.

— B n'admet pas de borne inférieure, 3 est sa borne supérieure ainsi que son maximum.

— C n'admet ni minimum ni maximum mais 0 comme borne inférieure et 4 comme borne supérieure.

— D n'admet ni minimum, ni maximum et 1 comme borne inférieure.

— E admet 0 pour borne inférieure ainsi que comme minimum, mais n'a ni borne supérieure ni maximum.

— F admet 0 comme borne inférieure et n'a pas de borne supérieure.

2.4.3 La partie entière

Définition 2.10: Partie entière

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$ admet un maximum. On appelle ce maximum la partie entière de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemple 2.9. Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, pour tout entier n, $\lfloor n \rfloor = n$, $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$, $\lfloor -1000.1 \rfloor = -1001$.

Remarque 2.6. — $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

— La partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ (mais pas strictement croissante).

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x, donc si $k \in \mathbb{Z}$ est tel que $k \leq x$, alors nécessairement $k \leq \lfloor x \rfloor$.

Propriété 2.14 (Caractérisation de la partie entière)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$k = \lfloor x \rfloor \Longleftrightarrow k \leq x < k + 1.$$

Démonstration. On raisonne par double implication.

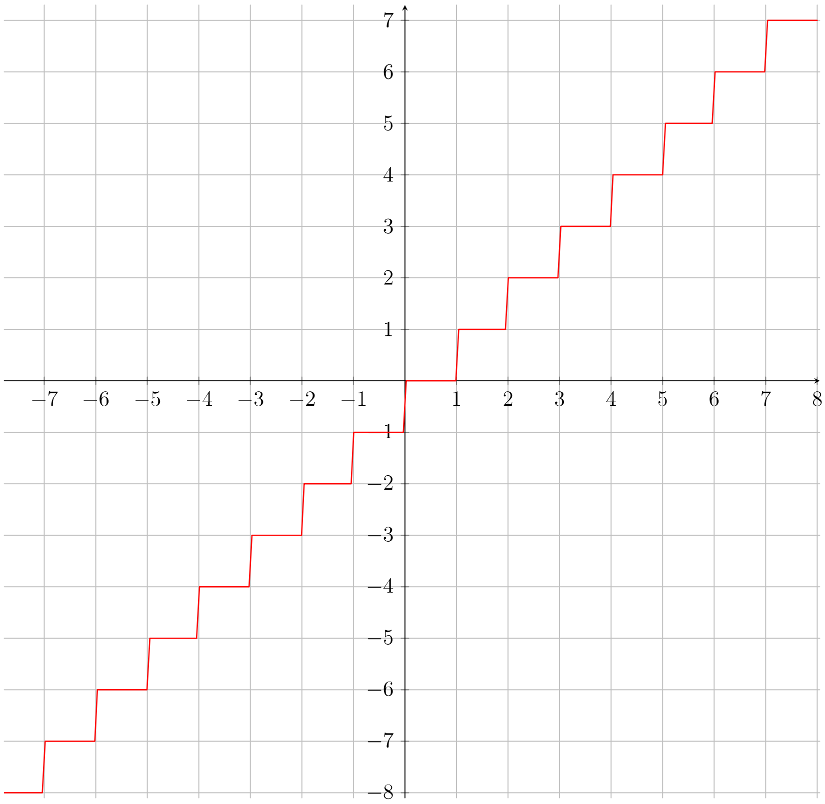

FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

— Supposons que $k = \lfloor x \rfloor$. Alors par définition $k \leq x$. De plus k est le plus grand des entiers inférieur ou égaux à x, donc $k+1$ doit être supérieur strictement à x, ainsi $k \leq x < k+1$.

— Réciproquement supposons que $k \in \mathbb{Z}$ soit tel que $k \leq x < k+1$. Comme $k \leq x$, nécessairement $k \leq \lfloor x \rfloor$. Mais comme $x < k+1$, on a nécessairement que $\lfloor x \rfloor < k+1$. On a donc $k \leq \lfloor x \rfloor < k+1$, c'est nécessairement que $k = \lfloor x \rfloor$.

□

Exercice 2.1.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \lfloor x \rfloor$.

2.5 Résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}$

2.5.1 Résolution d'équations

Commençons par rappeler quelques erreurs à ne pas commettre :

— Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle (égale à 0).

— Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$. On a parcontre la propriété suivante :

Propriété 2.15. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors*

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b).$$

Démonstration. En effet, étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b).$$

□

Exemple 2.10. L'équation $x^2 = 2$ a deux solutions réelles, $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$.

On dispose de plusieurs méthodes pour résoudre une équation.

- Travailler par équivalence. On transforme l'équation initiale en des équations équivalentes jusqu'à arriver à la solution. Par exemple

  Exemple 2.11. Résolvons l'équation $2x + 3 = 0$ d'inconnue x. On a

  $$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

  Ainsi l'équation $2x + 3 = 0$ a pour unique solution $x = -3/2$.

- Travailler par implication : on cherche des conditions nécessaires sur la solution, c'est-à-dire qu'on va trouver un ensemble contenant nécessairement toutes les solutions de l'équation, mais pouvant contenir des éléments n'étant pas solutions. On vérifie alors manuellement quels éléments sont solutions.

  La rigueur de la rédaction mathématique demande qu'une fois que l'on a commencé à travailler par implication, on ne réutilise plus de symbole d'équivalence dans le raisonnement.

  Exemple 2.12. Résolvons l'équation $x = \sqrt{2 - x}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Notons au préalable que le membre de droite n'est défini que pour $x \leq 2$.

  On a

  $$\begin{aligned} x = \sqrt{2-x} &\Rightarrow x^2 = 2 - x \\ &\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ &\Rightarrow x \in \{-2, 1\}. \end{aligned}$$

  Il nous faut maintenant vérifier quels éléments de l'ensemble $\{-2, 1\}$ sont solutions de l'équation initiale. 2 n'est pas solution mais 1 est solution.

  Finalement, nous avons montré que l'équation $x = \sqrt{2 - x}$ a pour unique solution 1.

Factorisation des trinômes du second degré

Définition 2.11. On dit que P est un trinôme du second degré si P est une fonction polynômiale du second degré, c'est-à-dire s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Définition 2.12. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P le trinôme du second degré associé, défini par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On appelle discriminant de P, et note habituellement Δ, le nombre défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Définition 2.13. Soit P un trinôme du second degré et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est une racine de P si $P(x_0) = 0$.

On dispose du résultat suivant, très important, qui donne les racines réelles, la forme factorisée ainsi que le signe sur $\mathbb{R}$ des trinômes du second degré.

Théorème 2.6: Racines, factorisation et signe d'un trinôme du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$, P le trinôme du second degré défini par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c$$

et Δ le discriminant de P. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation P admet exactement deux racines x_- et $x_+ \in \mathbb{R}$, données par

  $$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Dans ce cas, on a également

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_-)(x - x_+),$$

  de plus P est du signe de a sur l'ensemble $]-\infty, x_-] \cup [x_+, +\infty[$ et a un signe opposé à a sur l'intervalle $[x_-, x_+]$.
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine x_0 donnée par

  $$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  Dans ce cas, on a également

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_0)^2,$$

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet aucune racine réelle et P est du signe de a sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration. On cherche à résoudre l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et introduisons

$\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Examinons à présent les différents cas selon le signe de Δ.

- Si $\Delta < 0$, alors
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$
et on conclut.
- Si $\Delta = 0$, alors
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
et on conclut de même.
- Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et
$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right) \\ &= a(x - x_-)(x - x_+) \end{aligned}$$
indépendamment du signe de a. On conclut alors quand aux racines et au signe de P.

□

Exercice 2.2. Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ des trinômes P, Q, R définis par :

1. $P(x) = x^2 - 2x - 3$.
2. $Q(x) = 4x^2 + 4x + 1$.
3. $R(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

Propriété 2.16 (Relations coefficients-racines)**.** *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P le trinôme du second degré défini par*

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Supposons que P admettent deux racines réelles α et β. Alors on a les relations

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \textit{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Démonstration. En classe au tableau. □

Ainsi, si l'on connaît une racine d'un trinôme du second degré, cette propriété nous permet d'identifier la seconde à partir des coefficients du trinôme.

Exemple 2.13. Considérons le polynôme P défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 3x - 10$. On constate que 2 est racine. D'après les relations coefficients racines, l'autre racine r de P doit vérifier $2r = -10$, donc $r = -5$.

2.5.2 Résolution d'inéquations

Comment résoudre une inéquation ou montrer une inégalité dans $\mathbb{R}$? Il existe plusieurs méthodes, on peut par exemple

- Se ramener à l'étude d'un trinôme du second degré.

  Exemple 2.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 6 \geq x$.

- Se ramener à l'étude d'une fonction, à l'aide d'un tableau de variations.

  Exemple 2.15. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.