Chapitre 5

Suites usuelles

Sommaire

5.1 Généralités sur les suites 39
  5.1.1 Opérations 40
  5.1.2 Monotonie 40
5.2 Suites arithmétiques 41
5.3 Suites géométriques 42
5.4 Suites arithmético-géométriques 43
5.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 45

Dans ce chapitre, nous étudions les suites réelles usuelles. Nous commençons par donner quelques définitions générales concernant les suites, puis nous étudions dans l'ordre les suites arithmétiques, les suites géométriques, les suites aritmético-géométriques et finalement les suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

5.1 Généralités sur les suites

Définition 5.1. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 5.1. On peut aussi définir des suites indexées par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Remarque 5.2. Il existe deux manières usuelles de définir une suite.

1. Explicitement : on donne l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Exemple 5.1. Par exemple la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n.$$

   Il s'agit de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
   Ou encore la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \frac{1}{n}.$$

   Il s'agit de la suite dite *harmonique*.

2. Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents.

   Exemple 5.2. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 17$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + n.$$

   Ou encore la suite de Fibonacci (F_n), définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

5.1.1 Opérations

Définition 5.2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On définit :

- La somme des suites (u_n) et (v_n) comme la suite (s_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = u_n + v_n.$$

- Le produit des suites (u_n) et (v_n) comme la suite (p_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n \times v_n.$$

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, le quotient des suites (u_n) et (v_n) comme la suite (q_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

5.1.2 Monotonie

Définition 5.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n+1}$.

Définition 5.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exemple 5.3. Donner des exemples de suites constantes, stationnaire, monotones, strictement monotones.

Remarque 5.3. Attention, une suite n'est pas nécessairement monotone. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.2 Suites arithmétiques

Définition 5.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $r \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Théorème 5.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
2. $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
3. (a) Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
   (b) Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

Exercice 5.1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 7. Calculer u_{40}.

Exercice 5.2. Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_2 = 9$ et $u_5 = 26$. Quelle est la raison de (u_n) ?

Théorème 5.2: Sommes arithmétiques

Soient m et $n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2}.$$

En particulier on retrouve la formule de la somme de Gauss $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Considérer

$$\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=m}^{m-1} k.$$

□

Théorème 5.3: Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m + \frac{(n-m)(n-m+1)r}{2} = \frac{(u_m+u_n)(n-m+1)}{2}.$$

et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}.$$

Démonstration. La première égalité découle simplement de l'expression de u_k en fonction de k. La seconde égalité découle de

$$(n+1-m)u_m + \frac{(n-m)(n+1-m)r}{2} = (n+1-m) \times \left(\frac{u_m}{2} + \frac{u_m + (n-m)r}{2} \right).$$

□

Remarque 5.4. On retient souvent la première formule grâce au moyen mnémotechnique suivant :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(u_m + u_n)(n-m+1)}{2} = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes.}$$

Exercice 5.3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme -2 et de raison $\frac{3}{4}$. Calculer

$$\sum_{k=10}^{25} u_k.$$

5.3 Suites géométriques

Définition 5.6: Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Remarque 5.5.
- Une suite géométrique de raison 1 est constante.
- La relation de récurrence ci-dessus ne présuppose rien sur u_0.

Théorème 5.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n \Rightarrow u_n = u_p q^{n-p}$.

Remarque 5.6. En particulier, si le premier terme de la suite est u_1 alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Théorème 5.5: Sommes géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$, m et $n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$. Alors si $q \neq 1$

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$$

et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Théorème 5.6: Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q}.$$

Et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

Remarque 5.7. Si la raison q vaut 1 alors on additionne simplement $n-m+1$ fois le même terme, u_0.

Exercice 5.4. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3. Calculer

$$\sum_{k=7}^{15} u_k.$$

5.4 Suites arithmético-géométriques

Nous abordons ici les suites arithmético-géométriques, qui définissent un concept plus général que les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Définition 5.7: Suites arithmético-géométriques

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 5.8.

- Si $a = 1$, la suite (u_n) ci-dessus est une suite arithmétique de raison b. Si $b = 0$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison a. Autrement dit, toute suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique, toute suite géométrique est une suite arithmético-géométrique.
- La relation de récurrence ci-dessus ne présuppose rien sur u_0, qui peut-être quelconque.
- a et b sont des constantes qui ne dépendent pas de n !

Théorème 5.7
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

(donc une suite arithmético-géométrique). L'équation $x = ax + b$ admet une unique solution $l \in \mathbb{R}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_n - l$$

est une suite géométrique de raison a.

Remarque 5.9.
- La recherche de l correspond à la recherche d'un *point fixe*, c'est-à-dire une suite constante particulière qui vérifie la relation de récurrence.

- La suite de terme général $v_n = u_n - l$ alors « soltion de l'équation *homogène* associée » :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n.$$

- L'équation homogène est l'équation dont le second membre $b = 0$.

Démonstration. Comme $a \neq 1$, l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution $l = \frac{b}{1-a}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - (al + b) = a(u_n - l) = av_n.$$

□

Ce théorème nous permet de donner une formule explicite pour les suites arithmético-géométriques.

Méthode 5.1: Expliciter les termes d'une suite arithmético-géométrique

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$, et (u_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b. \qquad (\star)$$

Pour exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. On résoud l'équation associée à $(\star)$, $x = ax + b$, dont l'unique solution est donnée par
$$l = \frac{b}{1-a}.$$
2. On sait que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison l. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 a^n = (u_0 - l)a^n.$$
3. Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 - l)a^n + l = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Remarque 5.10. La formule donnant u_n en fonction de n n'est pas à connaître par coeur mais la méthode est à connaître.

Exercice 5.5. Soit (u_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+1} - 2u_n + 5 = 0.$$

Exprimer u_n en fonction de n et de u_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 5.8

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et (u_n) une suite arithmético-géométrique de paramètres (a, b), et de point fixe $l \in \mathbb{R}$.

- Si $u_0 = l$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = l$.
- Si $u_0 \neq l$, alors
  1. Si $|a| < 1$, alors
  $$\lim_{n \to \infty} u_n = l.$$
  2. Si $a > 1$, alors
  $$\lim_{n \to \infty} u_n = \pm\infty$$
  (le signe est donné par le signe de $u_0 - l$).
  3. Si $a \leq -1$, alors (u_n) n'admet pas de limite lorsque $n \to \infty$.

Remarque 5.11. Si $|a| < 1$ alors le point fixe l joue le rôle d'attracteur et la suite converge vers l. Si $a > 0$ alors la suite converge de manière monotone vers l, et si $a < 0$ alors la suite converge en oscillant autour de l.

5.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites géométriques peuvent-être qualifiées de suites récurrences linéaires d'ordre 1. On s'intéresse ici à l'ordre 2.

Définition 5.8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et $c \neq 0$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \qquad (\star\star)$$

On appelle polynôme caractéristique de l'équation $(\star\star)$ le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Remarque 5.12.
— L'hypothèse $a \neq 0$ et $c \neq 0$ permettent d'assurer que l'on a bien une relation de récurrence d'ordre 2.

— Pourquoi construire le polynôme caractéristique de la relation de récurrence ? Car $r \in \mathbb{R}$ est racine de $P \Leftrightarrow$ la suite géométrique $(u_n) = (r^n)$ satisfait la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

On cherche à construire les suites récurrentes d'ordre 2 sous à partir de suites géométriques.

Propriété 5.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites satisfaisant la relation $(\star\star)$. Alors pour tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation $(\star\star)$.*

Théorème 5.9: Solutions de la récurrence d'ordre 2

Soit (u_n) une suite définie comme ci-dessus, et notons Δ le discriminant de son polynôme caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
2. Si $\Delta = 0$, on note r la racine double du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = (\lambda + \mu n) r^n.$$
3. Si $\Delta < 0$, on note $r_\pm = \rho e^{i \pm \theta}$ les deux racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\right).$$

Les constants λ et μ sont déterminées par les deux premiers termes u_0 et u_1.

Démonstration. On prouve le premier cas par récurrence double, éventuellement en classe. □

Méthode 5.2: Expliciter les termes d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Comment exprimer u_n en fonction de n ?

1. Considérer le polynôme caractéristique associé : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Calculer le discriminant de P.
3. Appliquer le théorème précédent selon le signe de P :
   (a) Si $\Delta > 0$, en notant r_1, r_2 les deux racines distinctes de P, on sait que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

   On trouve λ et μ en résolvant le système

   $$\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0, \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &= u_1. \end{cases}$$

   (b) Si $\Delta = 0$, en notant r la racine double de P, on sait que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

   Les constantes λ et μ sont données par

   $$\begin{cases} \lambda &= u_0, \\ \lambda r + \mu r &= u_1. \end{cases}$$

Exercice 5.6

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

   Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

   Exprimer F_n en fonction de n.
3. Soit (v_n) la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 4u_{n+1} + 2u_n = 0$$

   Exprimer u_n en fonction de n.

Théorème 5.10: Suite récurrente d'ordre 2 avec second membre

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence avec second membre

$$(E_d) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n.$$

On appelle relation homogène associée la relation de récurrence

$$(E_0) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a\tilde{u}_{n+2} + b\tilde{u}_{n+1} + c\tilde{u}_n = 0.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite solution particulière de la relation de récurrence (E_d). Alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence E_0 (dont on sait exprimer toutes les solutions).

Méthode 5.3: Expliciter les termes d'une suite récurrente double avec second membre

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 3. \tag{5.1}$$

On cherche à exprimer (u_n) en fonction de n.

1. On cherche une suite solution particulière de la relation de récurrence (5.1). Comme le second membre est constant, on peut chercher cette solution particulière sous la forme d'une suite constante $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha - 7\alpha + 12\alpha = 3$ c'est-à-dire $6\alpha = 3$, donc $\alpha = 1/2$.
2. D'après le théorème précédent, la suite (v_n) de terme général $(u_n - \alpha)$ vérifie la relation de récurrence homogène

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 0,$$

et $v_0 = u_0 - \alpha = 3/2$, $v_1 = u_1 - \alpha = 7/2$. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est $x^2 - 7x + 12$ dont le discriminant vaut 1 et les deux racines distinctes sont donc 3 et 4.
3. Ainsi il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda 3^n + \mu 4^n.$$

On a $v_0 = \lambda + \mu = 3/2$ et $v_1 = 3\lambda + 4\mu = 7/2$. On trouve $\mu = -1$ et $\lambda = 5/2$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}3^n - 4^n,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{2}3^n - 4^n + \frac{3}{2}.$$