Chapitre 6

Nombres complexes

Sommaire

Dans ce chapitre, nous introduisons l'ensemble des *nombres complexes* $\mathbb{C}$. Il s'agit d'un ensemble de nombres « plus grand » que l'ensemble des nombres réels et qui offre aux scientifiques des outils permettant de résoudre un certain nombre de problèmes (par exemple, tout nombre admet une racine carrée complexe ou encore l'exponentielle complexe qui offre un formalisme relativement simple pour décrire les fonctions trigonométriques).

Les nombres complexes sont d'une importance capitale en mathématiques et en physique.

6.1 Introduction

Nous avons vu lors de l'introduction du chapitre 2 la suite d'*inclusions* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (on dit que $A \subset B$ si l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B) et la nécessité d'introduire l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; l'exemple historique étant que la longueur de la diagonale du carré de côté 1, $\sqrt{2}$, n'est pas un nombre rationnel.

Si l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ offre un certain nombre de propriétés riches et agréables mathématiquement, un problème central demeure : aucun nombre strictement négatif n'admet de racine carrée réelle. Notamment, l'équation

$$x^2 = -1$$

n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. Ce n'est plus le cas si l'on cherche la solution de cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On admet l'existence (que l'on peut prouver rigoureusement, mais c'est hors du programme de classe préparatoire) d'un nombre complexe $i \in \mathbb{C}$ tel que

$$i^2 = -1.$$

L'existence de ce nombre complexe i est à la base de la construction de l'ensemble des nombres complexes.

6.2 La forme cartésienne

6.2.1 Présentation

Nous avons vu que nous étions régulièrement amenés à considérer des équations du type $x^2 = -a$ où $a > 0$ est un nombre réel positif. Nous savons que ce type d'équations n'admet pas de solutions réelles. Toutefois, on peut « imaginer » des nombres solutions de ces équations ; c'est cette approche qui est à l'origine des nombres complexes.

Théorème 6.1: Le nombre i

Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.

Définition 6.1: Nombres complexes (forme cartésienne / forme algébrique)

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est constitué des nombres s'écrivant $x + iy$ où x et y sont deux nombres réels :

$$\mathbb{C} = \{x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cette écriture des nombres complexes s'appelle **la forme cartésienne** ou **forme algébrique**. On munit $\mathbb{C}$ de l'addition et de la multiplication définies pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ par

$$(a + ib) + (c + id) = (a + b) + i(c + d) \quad \text{et} \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Remarque 6.1.

- La formule donnant la multiplication complexe nous permet de retrouver $i^2 = -1$.
- La formule définissant l'addition de deux nombres complexes est une simple extension de l'addition des nombres réels (« on factorise par i »).

  Concernant la formule définissant la multiplication, la formule n'est pas à connaître par coeur. Il faut cependant savoir utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition et le fait que $i^2 = -1$ et retrouver cette formule rapidement.

Propriété 6.1: Parties réelles et imaginaires

Étant donné un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. On dit que

- a est la partie réelle de z et on note $a = \text{Re } z$,
- b est la partie imaginaire de z et on note $b = \text{Im } z$.

Ainsi
$$z = \text{Re }(z) + i\text{Im }(z).$$

De plus,

- si $\text{Im } z = 0$, alors z est un nombre réel,
- si $\text{Re } z = 0$, alors on dit que z est un nombre **imaginaire pur**.

Démonstration. Il nous faut prouver l'unicité de x et de y. Supposons que $z = a + ib = c + id$ avec c et $d \in \mathbb{R}$ et prouvons que $a = b$ et $c = d$. Supposons que $b \neq d$. Alors

$$a + ib = c + id \Longrightarrow a - c = i(b - d) \Longrightarrow i = \frac{a - c}{d - b} \Longrightarrow i \in \mathbb{R}.$$

Ceci est absurde car i n'est pas un nombre réel. On en déduit que notre hypothèse est fausse et donc que $b = d$; puis que $a = c$. Finalement a et b sont uniques. □

Remarque 6.2.

- On identifie l'ensemble $\mathbb{R}$ et $\{a + i0,\ a \in \mathbb{R}\}$ de sorte que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et on note
$$i\mathbb{R} = \{ib,\ b \in \mathbb{R}\}$$
l'ensemble des nombres imaginaires purs.
- Cette propriété signifie que l'on peut identifier la partie réelle et la partie imaginaire de deux nombres complexe : si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors
$$z = z' \Longleftrightarrow \text{Re } z = \text{Re } z' \quad \text{et} \quad \text{Im } z = \text{Im } z'.$$

Exercice 6.1. Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 - 3i$ et $z_3 = 1 - i$. Calculer $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$ et $z_1 z_3$.

Propriété 6.2. *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

- $\text{Re }(z + \lambda z') = \text{Re }(z) + \lambda \text{Re }(z')$,
- $\text{Im }(z + \lambda z') = \text{Im }(z) + \lambda \text{Im }(z')$,
- $\text{Re }(zz') = \text{Re }(z)\text{Re }(z') - \text{Im }(z)\text{Im }(z')$,
- $\text{Im }(zz') = \text{Re }(z)\text{Im }(z') + \text{Re }(z')\text{Im }(z)$,
- $\text{Re }(iz) = -\text{Im }(z)$,
- $\text{Im }(iz) = \text{Re }(z)$.

Démonstration. Ces propriétés découlent des formules donnant l'addition et la multiplication des complexes. Démonstration (partielle) en classe. □

Remarque 6.3. Il n'y a pas de **relation d'ordre totale** usuelle sur $\mathbb{C}$: on ne peut pas comparer deux complexes quelconques comme on le fait sur $\mathbb{R}$.

6.2.2 Représentation géométrique

On identifie l'ensemble $\mathbb{R}$ et la droite réelle. De même, il existe une identification canonique entre l'ensemble $\mathbb{C}$ et le plan, appelé le plan complexe.

Définition 6.2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit M un point du plan complexe, de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que le nombre complexe $z = a + ib$ est l'affixe de M et on note $M(z)$. Ainsi l'axe des abscisses correspond à l'ensemble des nombres réels et l'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des nombres imaginaires purs.
- A tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ correspond un unique point A, de coordonnées (x, y) tel que $\vec{u} = \vec{OA}$. L'affixe de $\vec{u}$ est alors le nombre complexe $z = x + iy$.

Exercice 6.2. Placer dans le plan complexes les points d'affixe i, $1 + i$, $2 - i$, $-4 + 2i$, $-7 - 3i$.

Exercice 6.3. Quel est l'affixe du point A de coordonnées $(-2, 3)$? du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(6, -1)$?

Remarque 6.4 (Interprétation de la somme de deux nombres complexes). Soient z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 respectivement. Alors $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.

6.2.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.3: Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit le conjugué de z, et on note $\bar{z}$, le nombre

$$\bar{z} = a - ib.$$

Remarque 6.5. Dans le plan complexe, le point N d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses.

Propriété 6.3. *Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors*

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Exemple 6.1. On a $\overline{3 + 7i} = 3 - 7i$ et $\overline{(1 + i)(2 - i)} = (1 - i)(2 + i)$.

Propriété 6.4. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{\overline{z}} = z$. (On dit que la conjugaison est une involution).*

Théorème 6.2 (Parties réelles, imaginaires et conjugaison)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \mathit{Re}\,(z)$,
- $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \mathit{Im}\,(z)$,
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$, *i.e.* z *est un nombre réel,*
- $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$, *i.e.* z *est un nombre imaginaire pur.*

Démonstration. En classe. Illustration géométrique. □

Remarque 6.6. Ces formules sont utiles et importantes, donc à connaître.

6.3 Module et argument

6.3.1 Module d'un nombre complexe

Propriété 6.5. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$z\bar{z} = \textit{Re}\ (z)^2 + \textit{Im}\ (z)^2 \geq 0.$$

Définition 6.4: Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit le module de z, noté $|z|$ comme

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\text{Re}\ (z)^2 + \text{Im}\ (z)^2}.$$

Remarque 6.7.
- Si $z = z + i0 \in \mathbb{R}$ alors le module de z est la valeur absolue de z (le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$), d'où l'utilisation de la même notation.
- Le module de z est la distance entre le point d'affixe z et l'origine dans le plan complexe.

Exemple 6.2. On a $|3+4i| = 5$, $|1+i| = \sqrt{2}$, $|-1-3i| = \sqrt{10}$.

Ci-dessous sont énoncées quelques propriétés importantes du module.

Propriété 6.6. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors*
- $|z| \geq 0$ *et* $|z| = 0 \iff z = 0$,
- $|z|^2 = z\bar{z}$,
- $|z| = |\bar{z}|$,
- $|zz'| = |z||z'|$,

Propriété 6.7.
- *Re* $(z) \leq |z|$ *et Re* $(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}$,
- *Im* $(z) \leq |z|$ *et Im* $(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}$.

Propriété 6.8. *Si $z \in \mathbb{C}^\star$, alors*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\textit{Re}\ z}{|z|^2} - i\frac{\textit{Im}\ z}{|z|^2},$$

en particulier si $|z| = 1$ alors

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Exemple 6.3. On a, en multipliant par le conjugué,

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{2}.$$

Calculer $1/(1-2i)$ et $i/(3+i)$.

Propriété 6.9: Inégalité triangulaire

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}$. On a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

On a de plus l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$.

Démonstration. Développer $|z+z'| = (z+z')(\overline{z+z'})$. Cas d'égalité $Re(zz') = |zz'|$. □

Remarque 6.8. L'inégalité triangulaire exprime que le chemin le plus court est la ligne droite dans le plan. Aller de ma chambre au lycée en ligne droite est plus rapide que d'aller de ma chambre au lycée en passant par la boulangerie.

Propriété 6.10 (Corollaire de l'inégalité triangulaire)**.** *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Alors*

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z + z'|.$$

6.3.2 Argument d'un nombre complexe

Propriété 6.11. *Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points dont l'affixe est un nombre complexe de module* 1.

Définition 6.5. Soit z un nombre complexe de module 1. On définit l'argument de z comme l'angle entre le point 1 et le point M d'affixe z. L'argument est exprimé en radians.

Remarque 6.9. Ici on n'a défini l'argument que pour les nombres complexes de module 1. Comme pour les angles, l'argument n'est défini qu'à 2π près (cf le chapitre sur la trigonométrie).

Définition 6.6: Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. On définit l'argument de z comme l'argument de $\frac{z}{|z|}$. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

Remarque 6.10. Pour définir l'argument d'un nombre complexe quelconque non nul, on le ramène sur le cercle unité en divisant par son module.

Définition 6.7: Argument principal

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On définit l'argument principal de z comme l'argument de $z \in]-\pi, \pi]$. On le note $\arg(z)$.

Remarque 6.11. L'intervalle est ouvert en $-\pi$ et fermé en π pour assurer l'unicité. Penser par exemple au nombre complexe -1.

Exemple 6.4. Donner l'argument principal des nombres complexes 3, i, -10, $2+2i$, $2\sqrt{3}+2i$.

6.4 La forme trigonométrique

Théorème 6.3: Forme trigonométrique (Définition)

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Il existe un unique $\rho \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et $\rho = |z|$, $\theta = \arg(z)$. Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique de z.
Si $z = 0$, on a $\rho = 0$ mais il n'y a plus unicité pour le nombre θ.

Démonstration. Si $z = 0$ c'est évident, et si $z \neq 0$, alors le nombre $z/|z|$ a pour module 1. Donc en posant $\theta = \arg(z/|z|)$, on a Re $(z/|z|) = \cos\theta$ et Im $(z/|z|) = \sin\theta$.

Ainsi
$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$
puis
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$
□

Méthode 6.1: Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique

Pour mettre un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ sous forme trigonométrique, on commence par calculer son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on cherche $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que
$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$
Dans les exercices, θ est généralement un angle remarquable.

Exemple 6.5. Donner la forme trigonométrique de $-3 + \sqrt{3}i$, de $4 + 4i$, de i, 2.

6.5 Exponentielle complexe

Dans cette section, on fera de nombreux schémas illustratifs.

Définition 6.8

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$
$e^{i\theta}$ est l'affixe du point du cercle trigonométrique d'angle θ.

Exemple 6.6. Ainsi $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$.

Propriété 6.12. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors*

- $|e^{i\theta}| = 1$,
- $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Démonstration. Relation de Pythagore et 2π périodicité de $\cos$ et $\sin$. □

Propriété 6.13. *Soit θ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Alors*

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$,
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

Démonstration. Formules d'addition du cosinus et du sinus ; parité du cosinus et du sinus et relation précédente pour deuxième égalité ; récurrence sur n. □

Exemple 6.7. Par exemple
$$e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$
On peut vérifier en écrivant les définitions de l'exponentielle complexe.

6.6 La forme exponentielle

Théorème 6.4: Forme exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Il existe un unique $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que
$$z = \rho e^{i\theta},$$
donnés par $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Cette écriture s'appelle la forme exponentielle de z. Comme pour la forme trigonométrique, si $z = 0$ alors $\rho = 0$ et θ n'est pas unique.

Exemple 6.8. Donner la forme exponentielle de $4 + 4i$, de $-\sqrt{3} + i$.

Méthode 6.2: Quelle forme pour quelle situation ?

S'il l'ont est amené à effectuer des additions ou soustractions de nombres complexes, utiliser la forme algébrique. S'il s'agit de multiplications ou de divisions (ou donc de puissances) utiliser la forme exponentielle.

Exemple 6.9. Calculer $(1+i)^{10}$, $(1+i)^{2023}$, $(1+i)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

6.7 Application à la trigonométrie

Les formules de trigonométrie se trouvent grandement simplifiées par l'utilisation de la forme exponentielle.

Propriété 6.14. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a*
$$\cos\theta = \mathit{Re}\, e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \mathit{Im}\, e^{i\theta}.$$

Théorème 6.5 (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Remarque 6.12. Ne pas oublier le i au dénominateur pour le sinus.

Théorème 6.6 (Formules de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$(cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode 6.3: Application à la linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer une expression du type $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ en somme de termes de la forme $\cos(n\theta)$ et $\sin(m\theta)$.
Pour linéariser :

1. On écrit les $\cos$ et $\sin$ en utilisant les formules d'Euler.
2. On développe les puissances avec le binôme de Newton (ou une identité remarquable).
3. On regroupe les termes de même exposants pour retrouver des $\cos$ et des $\sin$ en utilisant à nouveau les formules d'Euler.

Par exemple, linéarisons $\sin^2(\theta)\cos(\theta)$. On écrit

$$\begin{aligned}\sin^2(\theta)\cos(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{-4}\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{i\theta}-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta)-\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

Exercice 6.4. Linéariser $\sin^4(\theta)$, $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$.

Méthode 6.4: La factorisation par l'angle moyen

Supposons qu'on veuille trouver la forme exponentielle du nombre complexe $z = 1 - e^{i\theta}$, avec $\theta \in]-\pi,\pi]$. On considère 1 comme e^{i0}, on factorise par l'exponentielle complexe de l'angle moyen entre 0 et θ : $\theta/2$. On écrit

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Comme $\cos\theta/2 \geq 0$, on reconnaît la forme exponentielle de z : $|z| = 2\cos\theta/2$ et $\arg(z) = \theta/2$.
Attention, si $\theta \notin]-\pi,\pi]$, on peut avoir $\cos\theta/2 < 0$.

Remarque 6.13. Faire un dessin !

Exercice 6.5. Mettre les nombres $1 - e^{-i\theta}$ et

$$\frac{1-e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}}$$

sous forme exponentielle.

6.8 Application aux trinômes et aux suites récurrentes linéaires doubles

6.8.1 Racines des trinômes du second degré

Dans $\mathbb{R}$, le carré d'un nombre est forcément positif. On l'a vu en introduction, ce n'est plus le cas dans $\mathbb{C}$.

Propriété 6.15. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

- *Si $a \geq 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions réelles données par $x = \pm\sqrt{a}$.*
- *Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet pour racine unique $x = 0$.*
- *Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions imaginaires pures $x = \pm i\sqrt{-a}$.*

Démonstration. Au tableau. □

Théorème 6.7: Racines, factorisation et signe d'un trinôme du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$, P le trinôme du second degré défini par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c$$

et Δ le discriminant de P. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation P admet exactement deux racines x_- et $x_+ \in \mathbb{R}$, données par

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine x_0 donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  Dans ce cas, on a également

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_0)^2,$$

- Si $\Delta < 0$, alors P admet exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre, données par

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple 6.10. Résoudre $5x^2+1 = -319$, résoudre $x^2-4x+8 = 0$. Résolution de l'équation $x^2+x+1 = 0$, nombre j.

6.8.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 6.9. Soit $a \in \mathbb{C}$. Les racines complexes de a sont l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 = a$.

Exemple 6.11. Les racines complexes de 100 sont 10 et -10. Les racines complexes de -100 sont $10i$ et $-10i$.

Remarque 6.14. Sauf pour $a = 0$, il n'y a pas unicité de la racine d'un nombre complexe. On n'utilise pas la notation $\sqrt{\cdot}$ pour une racine complexe, contrairement au cas réel.

Théorème 6.8
Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et notons $a = \rho e^{i\theta}$ la forme exponentielle de a, avec $\rho = |a| > 0$ et $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi]$. Alors a possède exactement deux racines complexes données par

$$\sqrt{\rho}e^{i\theta/2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\rho}e^{i\theta/2} = \sqrt{\rho}e^{i(\theta/2+\pi)}$$

Exercice 6.6. Appliquer ces formules au cas où $a \in \mathbb{R}^+$, au cas où $a \in \mathbb{R}^-$.

Exercice 6.7. Chercher les racines carrées complexes de i, de $1+i$.

Remarque 6.15. Si a est donné sous forme cartésienne, $a = \text{Re }(a) + i\text{Im }(a)$, alors $z = x + iy$ vérifie $z^2 = a$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= \sqrt{\text{Re }(a)^2 + \text{Im }(a)^2}, \\ x^2 - y^2 &= \text{Re }(a), \\ 2xy &= \text{Im }(a). \end{cases}$$

Exemple 6.12. Résoudre l'équation $z^2 = 5 - 12i$.

6.8.3 Retour sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On revient dans le contexte des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Théorème 6.9: Solutions de la récurrence d'ordre 2, cas complexe

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire telle qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ vérifiant

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notons Δ le discriminant de son polynôme caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
2. Si $\Delta = 0$, on note r la racine double du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = (\lambda + \mu n) r^n.$$
3. Si $\Delta < 0$, on note $r_\pm = \rho e^{i\theta}$ les deux racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique, alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\right).$$

Les constants λ et μ sont déterminées par les deux premiers termes u_0 et u_1.

Exemple 6.13. Soit (u_n) la suite donné par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + 8u_n = 0.$$

Exprimer (u_n) en fonction de n. Vérifier que la formule obtenue fonctionne pour les 3 ou 4 premiers termes de la suite.

Exemple 6.14. Soit (u_n) la suite donné par $u_0 = 5$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -9u_n.$$

Exprimer (u_n) en fonction de n. Vérifier que la formule obtenue fonctionne pour les 3 ou 4 premiers termes de la suite.

Exemple 6.15. Soit (u_n) la suite donné par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer (u_n) en fonction de n. Vérifier que la formule obtenue fonctionne pour les 3 ou 4 premiers termes de la suite.