Chapitre 8

Fonctions usuelles

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés des fonctions usuelles, et nous nous intéressons à l'étude de fonctions : en particulier l'obtention de tableaux de variations permet d'avoir une connaissance précise du comportement d'une fonction.

8.1 Généralités sur les fonctions

8.1.1 Vocabulaire

Définition 8.1

- On dit que f est une fonction numérique de la variable réelle s'il existe un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}$ tels que à chaque $x \in A$ correspondre un nombre réel $f(x) \in B$.
- On dit que A est l'ensemble de définition de f, on dit aussi que f est définie sur l'ensemble A. On note parfois $A = D_f$.
- On dit que B est l'ensemble d'arrivée de f, ou que f est à valeurs dans l'ensemble B..

Définition 8.2. Dans ce contexte, on note

$$\boxed{f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$$

la fonction f, ou encore $x \mapsto f(x)$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur le domaine de définition de f.

Remarque 8.1. Il est très important de distinguer les réels x et $f(x)$ et la fonction f. $f(x)$ n'est pas une fonction !

Exemple 8.1. La fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.3. On appelle graphe ou courbe représentative de f l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D_f$, noté C_f :

$$C_f = \{(x, f(x)),\ x \in D_f\}.$$

Exemple 8.2.
- L'identité sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

- La fonction carré $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

Remarque 8.2. Considérons la fonction

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2. \end{array}$$

On remarque que $D_g = \mathbb{R}^+ \subset D_f$ et que $\forall\, x \in D_g,\ g(x) = f(x)$. On dit que g est la restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

Remarque 8.3. Pour étudier une fonction, la première chose à faire est d'étudier son domaine de définition !

Exemple 8.3. Pour étudier l'ensemble de définition d'un quotient, il faut vérifier que son dénominateur ne s'annule pas.

1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

2. Soit g la fonction définie par
$$g(x) = \frac{e^x}{x^2-1}.$$

Remarque 8.4. Il est très important de préciser l'ensemble de définition d'une fonction. Pour l'ensemble d'arrivée, on peut se permettre dans un premier temps de prendre l'ensemble le plus large possible.

Par exemple on peut considérer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x^4$$

est à valeurs

8.1.2 Opérations sur les fonctions

Dans cette partie, on passe en revue les opérations arithmétiques sur les fonctions. Les opérations usuelles sur les nombres réels se transposent aux fonctions.

Définition 8.4. On dit que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si $D_f = D_g$ et si $\forall\, x \in D_f,\ f(x) = g(x)$.

Remarque 8.5. Pour que deux fonctions soient égales, il faut qu'elles partagent le même ensemble de définition.

Définition 8.5. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. On définit

- La somme de f et de g, $f+g$, par

$$f+g: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x). \end{array}$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit λf, par
$$\lambda f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x). \end{array}$$
- Le produit de f et de g, fg, par
$$fg : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)g(x). \end{array}$$
- Si $\forall x \in D,\ g(x) \neq 0$, le quotient f/g, par
$$\frac{f}{g} : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Exemple 8.4. Soient les fonctions

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$
- $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$
- $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2+1 \end{array}$

Exprimer les fonctions fg, $g+h$, f/h et $4f$.

Définition 8.6: Composée de deux fonctions

Soient I et J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et supposons que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ soient deux fonctions. On définit la composée de f par g, notée $g \circ f$, par
$$g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)). \end{array}$$

Remarque 8.6. On visualise la situation sur un diagramme.

Exemple 8.5. On considère les fonctions $\ln$ et $\exp$. Ces fonctions sont définies sur

Les composées sont-elles bien définies ?

Exemple 8.6. Si
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}, \end{array}$$
alors

On constate qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$. (On dit que la composition de fonctions n'est pas une opération commutative.)

Remarque 8.7. Pour étudier le domaine de définition de la composée de deux fonctions, il faut vérifier que les ensembles sont compatibles. En particulier, si f est une fonction numérique, alors

1. $\ln \circ f$ est définie là où $f > 0$,
2. $\sqrt{\cdot} \circ f$ est définie là où $f \geq 0$.

Exemple 8.7. 1. Si $g(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$, alors

2. Si $h(x) = \ln(x^2 - 9)$, alors

8.2 Périodicité et symétries d'une fonction

8.2.1 Fonctions périodiques

Définition 8.7. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que f est T-périodique ou encore périodique de période T si $\forall\, x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et si $f(x + T) = f(x)$.

Exemple 8.8. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et à valeurs dans $[-1, 1]$.

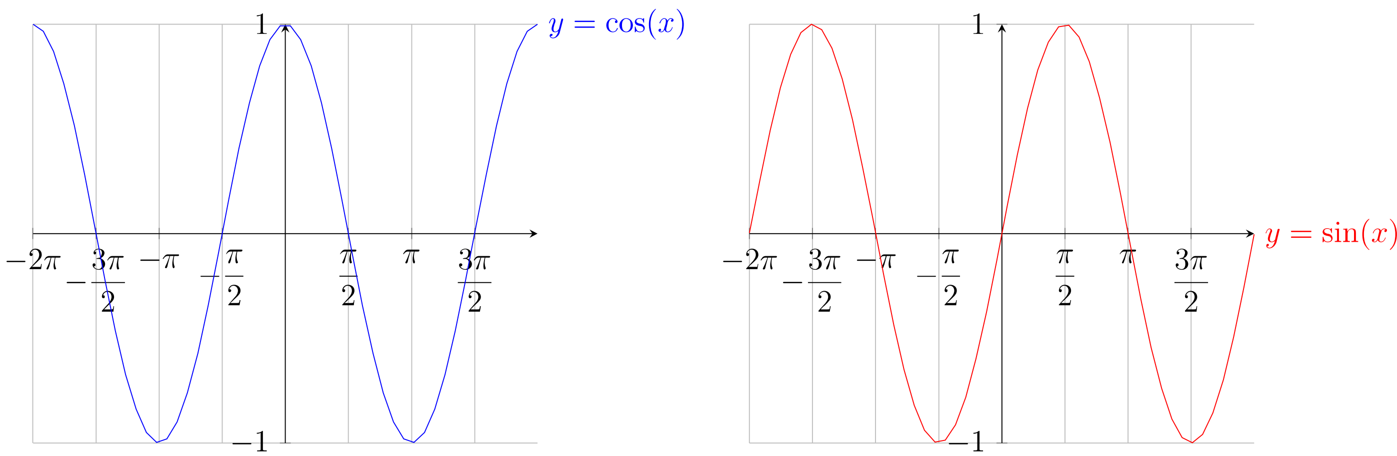


FIGURE 8.1 – Graphe des fonctions $\cos$ et $\sin$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

Exemple 8.9. La fonction $\tan$ est définie sur l'ensemble

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 8.8. Le graphe d'une fonction T-périodique s'obtient en traçant le graphe de la fonction sur l'intervalle $[0, T]$ puis en faisant une translation horizontale de celui-ci.

Remarque 8.9: Méthode pour l'étude d'une fonction

Le fait qu'une fonction soit périodique permet de réduire l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, T]$.

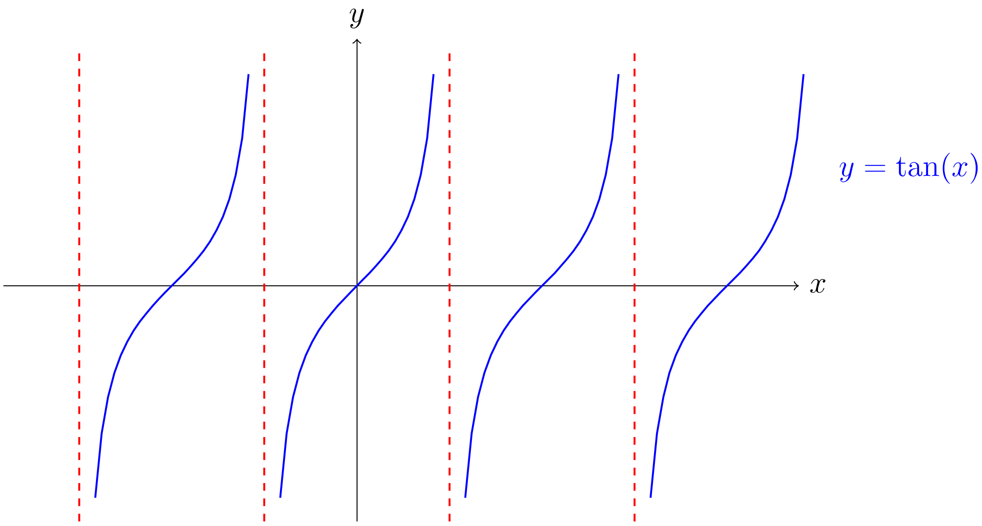


FIGURE 8.2 – Graphe de la fonction $\tan$ sur l'intervalle $]-3\pi/2, 3\pi/2[$

8.2.2 Fonctions paires, fonctions impaires

Définition 8.8. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que

- f est paire si $\forall\, x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si $\forall\, x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 8.10. La fonction $\cos$ est paire. Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont impaires.
Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^4$ sont paires.
Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires.

Théorème 8.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}.$$

- Si n est pair, alors f_n est paire.
- Si n est impair, alors f_n est impaire.

Remarque 8.10. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées tandis que le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0. Faire un schéma.

Remarque 8.11 (Méthode pour l'étude d'une fonction). La parité ou l'imparité d'une fonction permet de réduire l'étude de la fonction à $D_f \cap \mathbb{R}^+$.

Propriété 8.1. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction impaire, telle que $0 \in D_f$. Alors $f(0) = 0$.*

Propriété 8.2. *La fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire.*

8.3 Monotonie d'une fonction

8.3.1 Définitions et premières remarques

Définition 8.9. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est croissante sur I si et seulement si
- f est strictement croissante sur I si et seulement si
- f est décroissante sur I si et seulement si
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si
- f est monotone sur I (respectivement strictement monotone) si et seulement si
- f est constante sur I si et seulement si

Exemple 8.11.
- La fonction identité est
- La fonction $x \mapsto -x$ est
- La fonction carrée est
- La fonction inverse est
- La fonction $x \mapsto 3$ est

Remarque 8.12.
- Attention, en général une fonction n'est pas forcément monotone (elle peut n'être ni croissante ni décroissante sur son ensemble de définition).
- Ainsi, une fonction non croissante n'est pas forcément décroissante (penser à la fonction carrée).

Propriété 8.3. *Une fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I est constante.*

8.3.2 Propriétés

Théorème 8.2
- *La somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est*
- *Soit f une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
    - *Si f est croissante (respectivement décroissante) et $\lambda \geq 0$, alors*
      décroissante).
    - *Si f est croissante (respectivement décroissante) et $\lambda \leq 0$, alors*
- *La composée de deux fonctions croissantes*
- *La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est*
- *La composée de deux fonctions décroissantes est*

Exemple 8.12.
- La fonction $x \mapsto -2\sqrt{x}$ est

- La fonction $y \mapsto 4e^y$ est

- La fonction $x \mapsto -1/x$ est

- La fonction $x \mapsto 1/e^{-x}$ est

- La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{e^x}$ est

8.3.3 Liens avec la dérivée

Dans cette partie, on rappelle le lien entre signe de la dérivée et monotonie de la fonction. La dérivée est un outil extrêmement puissant : on ramène l'étude de la monotonie d'une fonction au signe de sa dérivée sur un intervalle.

Théorème 8.3: Signe de la dérivée, monotonie de la fonction sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarque 8.13. Le fait que I est un intervalle est une hypothèse fondamentale : penser à l'exemple de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^\star$.

8.4 Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 8.4: Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Fonction dérivée
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $]-\infty, 0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n<0$	
$x \mapsto 1/x$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	
$x \mapsto \ln x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \tan x$	$D_{\tan}$	$D_{\tan}$	

On dispose des règles de dérivation suivantes concernant les opérations sur les fonctions :

Théorème 8.5: Opérations sur les fonctions et dérivations

Si f et g sont dérivables sur un intervalle I, alors

- $f + g$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I,\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$
- $f \times g$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I,\ (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$
- Si $\forall\, x \in I,\ g(x) \neq 0$, alors $1/g$ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I,\ \left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

- Si $\forall\, x \in I,\ g(x) \neq 0$ alors f/g est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I,\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

Exemple 8.13.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2\cos(x)$ est dérivable comme produit des deux fonctions carré et $\cos$ et sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) =$$

- La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + x^3$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Sa dérivée est la fonction

$$h' : x \mapsto$$

- La fonction $g : x \mapsto x/(e^x - 1)$ est définie et dérivable sur Sa dérivée vaut

On dispose du résultat suivant pour la dérivée de la composition de deux fonctions :

Théorème 8.6: Dérivée de la composée

Si I et J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ est dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Exemple 8.14. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x^2).$$

Alors

Comme conséquence, on a les formules de dérivation suivantes :

Théorème 8.7: Dérivée des fonctions usuelles

Si u est une fonction définie sur D_u et dérivable sur $D_{u'}$ alors on dispose les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur les ensembles indiqués, avec la fonction dérivée indiquée :

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Fonction dérivée
u^n $(n \in \mathbb{N})$	D_u	$D_{u'}$	
$\frac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset D_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	
$\sqrt{u}$	$u \geq 0$ sur I	$I \subset D_{u'}$ et $u > 0$ sur I	
$\ln \lvert u \rvert$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset D_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	
e^u	D_u	$D_{u'}$	
u^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$u > 0$ sur I	$I \subset D_{u'}$ et $u > 0$ sur I	
$\sin u$	D_u	$D_{u'}$	
$\cos u$	D_u	$D_{u'}$	
$\tan u$	$u \in D_{\tan}$	$I \subset D_{u'}$ et $u \in D_{\tan}$	

Exemple 8.15. Établir le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \sin(3x^2+1)$,
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{e^x+1}$,
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$,
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(5x-4)^2}$.

8.5 Catalogue des fonctions usuelles

8.5.1 Fonctions élémentaires

Fonctions puissance et fonctions polynomiales

On considère dans un premier temps les fonctions puissance élémentaires, c'est-à-dire les fonctions

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array}$$

où n est un entier naturel.

En dehors des cas triviaux $n = 0$ et $n = 1$, les deux exemples les plus importants sont $n = 2$ et $n = 3$: la fonction carrée et la fonction cube.

- Si n est pair, f_n est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et de limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Son ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
  Tableau de variations de f_n (quand n est pair) :

- Si n est impair, f_n est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$ de limites $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. Son ensemble image est $\mathbb{R}$.
  Tableau de variations de f_n (quand n est impair) :

Les fonctions f_n sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour $n \geq 1$, leur dérivée f_n' est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f_n'(x) = nx^{n-1},$$

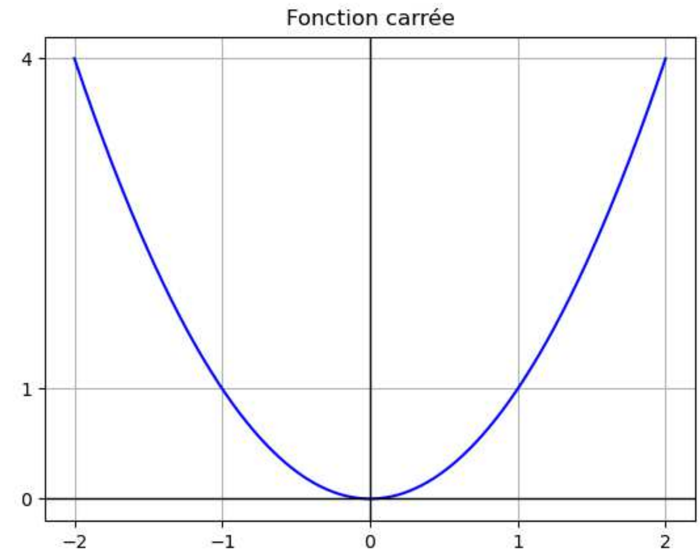
ce qu'on peut encore écrire $f_n' = nf_{n-1}$.

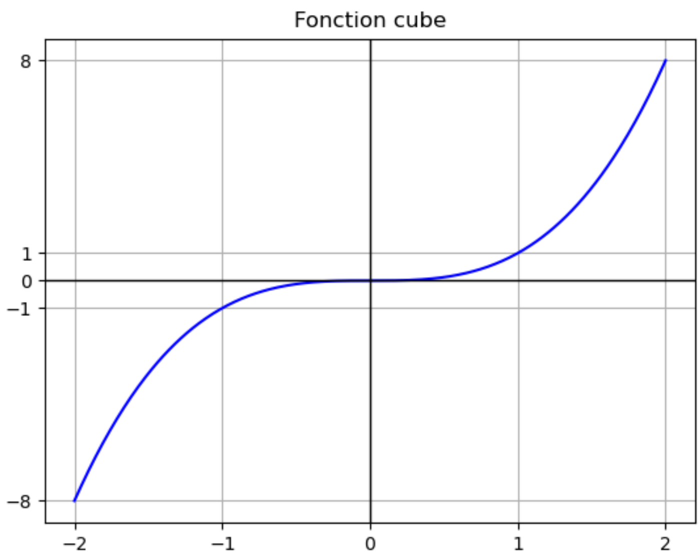
Pour $n \geq 2$, la dérivée de f_n s'annule donc en 0. Graphiquement, la courbe représentative de f_n a alors une tangente horizontale en l'origine.

On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire des fonctions f_n, c'est-à-dire toute fonction f satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où les a_k sont des constantes réelles.





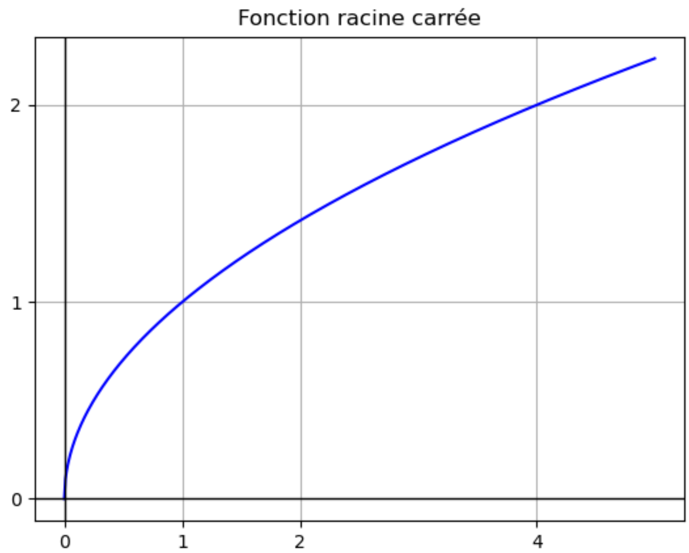
Fonction racine carrée

$$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et son ensemble image est $\mathbb{R}_+$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En l'origine, la courbe représentative a une tangente verticale, ce qui explique l'absence de dérivée en ce point.

Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.



<u>Tableau de variations de la fonction racine carrée :</u>

Remarque 8.14. On peut définir des fonctions racines n-ème, pour n'importe quel entier $n \geq 2$. Pour n impair, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour n pair, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Cependant, on préfèrera généralement utiliser l'exponentielle et le logarithme pour traiter ces fonctions.

Fonction inverse

La fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et a pour ensemble image $\mathbb{R}^*$. Composée avec elle-même, on obtient la fonction identité $x \mapsto x$: on dit que la fonction inverse est une *involution*.

C'est une fonction impaire. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ ET sur $\mathbb{R}^{+*}$

Remarque 8.15. Attention à ne pas dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est faux (puisque par exemple $-2 < 2$ et $-1/2 < 1/2$)

Sa limite en $\pm\infty$ est 0. En 0^+, la fonction tend vers $+\infty$; en 0^- vers $-\infty$. L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale tandis que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto -1/x^2$.

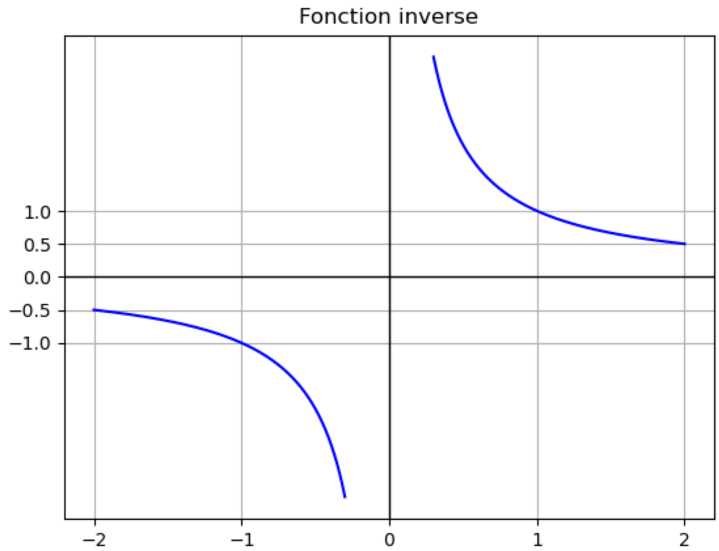


Tableau de variations de la fonction inverse :

On peut aussi écrire cette fonction comme $x \mapsto x^{-1}$. On peut généraliser et considérer toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^{-n}$, pour $n \geq 1$. On pourrait en faire une étude analogue. Notons en particulier que la dérivée de $x \mapsto x^{-n}$ est $-nx^{-n-1}$.

Remarque 8.16. La dérivée de $x \mapsto x^n$ est toujours nx^{n-1}, que n soit un entier positif ou négatif. Le plus simple est sans doute de retenir cette unique formule et de systématiquement écrire une fonction de la forme $x \mapsto 1/x^n$ sous la forme $x \mapsto x^{-n}$, avant de dériver.

Exercice 8.1. Calculer la dérivée et le domaine de dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^3}$.

8.5.2 Fonctions valeur absolue et partie entière

Fonction valeur absolue

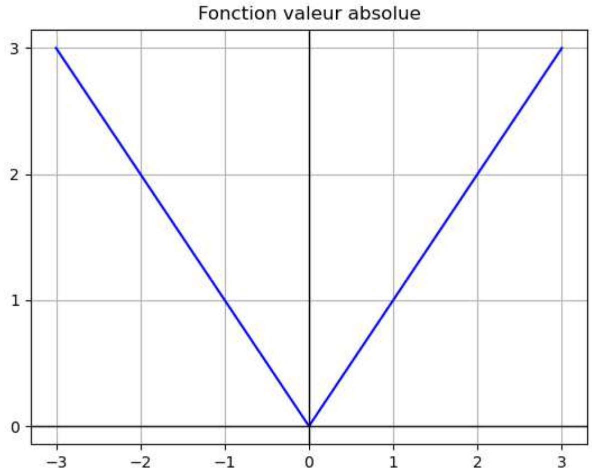
La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour ensemble image $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction paire.

Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$.

La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

On rappelle la formule utile

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \sqrt{x^2}.$$



<u>Tableau de variations de la fonction valeur absolue :</u>

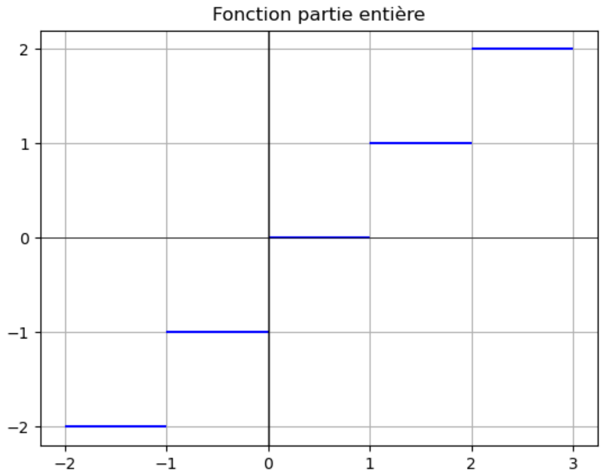
Fonction partie entière

Définition 8.10. Soit x un réel. La *partie entière* de x, notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n tel que $n \leq x$.

La partie entière d'un réel x vérifie donc $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemple 8.16. $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = \pi$ et $\lfloor -3,24 \rfloor = -4$.

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a $\mathbb{Z}$ pour ensemble image. C'est une fonction croissante, mais *pas* strictement croissante : elle est constante égale à n sur chaque intervalle $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$.



8.5.3 Fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour ensemble image $\mathbb{R}_+^*$. On note e^x ou $\exp(x)$ l'image d'un réel x par cette fonction.

Sa limite en $-\infty$ est 0 ; sa limite en $+\infty$ est ∞ et elle est strictement croissante.

La fonction exponentielle est dérivable et sa dérivée est égale à elle-même. Ce résultat et la condition $\exp(0) = 1$ caractérisent la fonction exponentielle.

On a la règle de calcul suivante sur l'exponentielle :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Il est utile de connaître une valeur approchée de $e = e^1$: environ $2,7$.

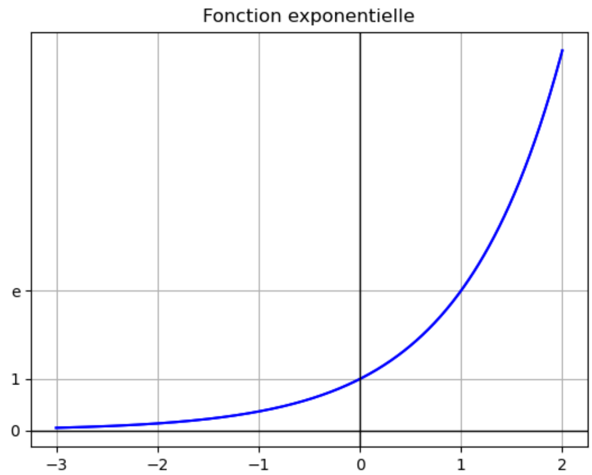


Tableau de variations de la fonction exponentielle :

Fonction logarithme

La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour ensemble image $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante et a pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Elle est dérivable de dérivée égale à $x \mapsto 1/x$. On a la règle de calcul suivante sur le logarithme :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^* : \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Les fonctions exponentielle et logarithme sont inverses l'une de l'autre, au sens où

— $\forall\, x \in \mathbb{R} : \ln\Big(\exp(x)\Big) = x$;

— $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* : \exp\Big(\ln(x)\Big) = x$.

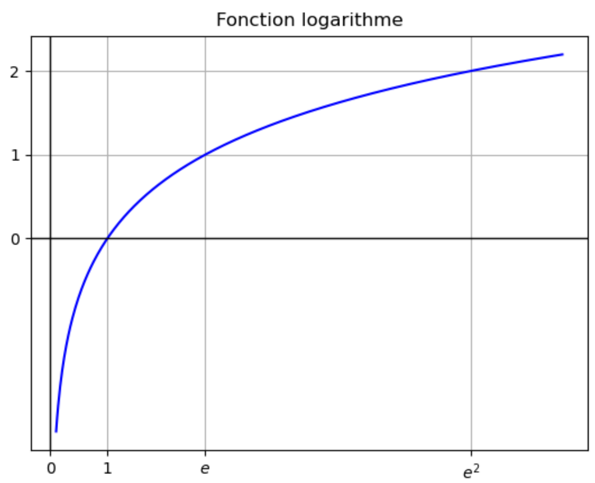


Tableau de variations de la fonction logarithme :

Il peut être utile de connaître une valeur approchée de $\ln(2)$: environ $0,7$. Comme $e \cong 2,7$ et que $\ln(e) = 1$, il est bien cohérent d'avoir $\ln(2) < 1$.

Logarithme et exponentielle de base b

Soit $b > 0$. Dans certaines sciences, il est courant d'utiliser des logarithmes dans une autre base (en pratique, la base 10 en chimie et la base 2 en informatique). Par définition, la fonction *logarithme de base* b est la fonction

$$\log_b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)},$$

définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, on a pour tout b : $\log_b(b) = 1$. Le *logarithme naturel* – c'est-à-dire la fonction $\ln$ – est égal à $\log_e$. Traditionnellement en France, on note simplement $\log$ pour $\log_{10}$.

On peut de même définir une *exponentielle de base* b. Par définition,

$$\exp_b : x \mapsto \exp(x \ln b),$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note le plus souvent b^x plutôt que $\exp_b(x)$. Si x est un entier, la notation b^x peut alors être interprétée comme un calcul élémentaire de puissances, ou bien comme la quantité $\exp_b(x)$. Heureusement, les notations sont compatibles : elles calculent la même chose.

Les fonctions $\exp_b$ et $\log_b$ sont inverses l'une de l'autre. Dans le cas particulier où $b = 10$, notons qu'on a

$$\begin{aligned} n = \lfloor \log_{10} x \rfloor &\iff n \leq \log_{10} x < n+1 \\ &\iff 10^n \leq x < 10^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \geq 1$, $\lfloor \log_{10} x \rfloor$ est le nombres de chiffres de x, écrit en base 10.

Quand une expression fait intervenir des puissances un peu compliquées, on reviendra *systématiquement* à la notation exponentielle : on écrira donc b^a comme $\exp(a \ln b)$. En particulier, si $a = 1/n$, est l'inverse d'un entier naturel et si $x > 0$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp(\frac{\ln(x)}{n}).$$

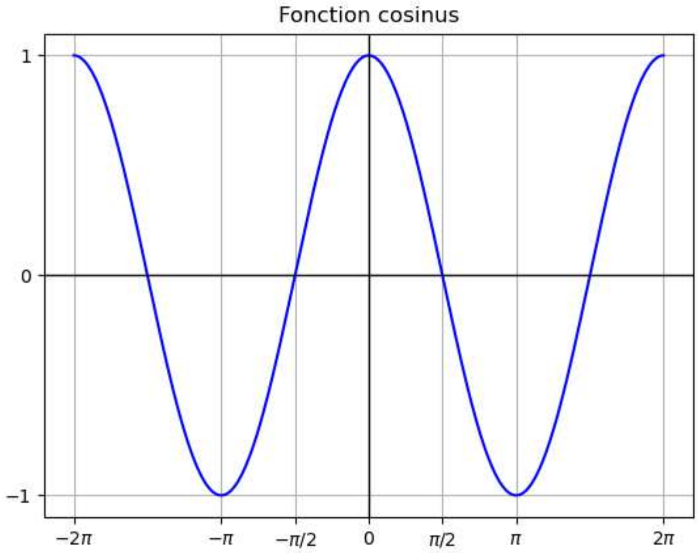
8.5.4 Fonctions trigonométriques

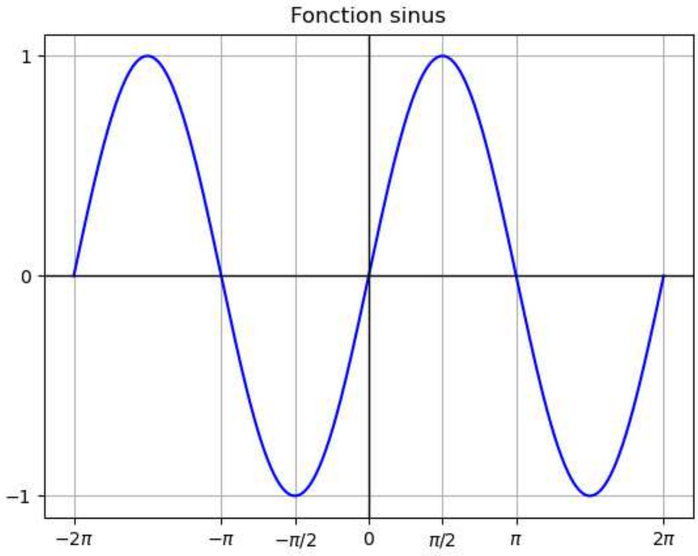
Les fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour ensemble image $[-1, 1]$. Elles sont périodiques de période 2π. La fonction cosinus est paire, tandis que la fonction sinus est impaire. Elles sont toutes deux dérivables : $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

De la relation $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, on déduit que le graphe de cosinus s'obtient en translatant le graphe de sinus de $\pi/2$ (vers la gauche !).

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et strictement croissante sur $[\pi, 2\pi]$. La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2, 3\pi/2]$.





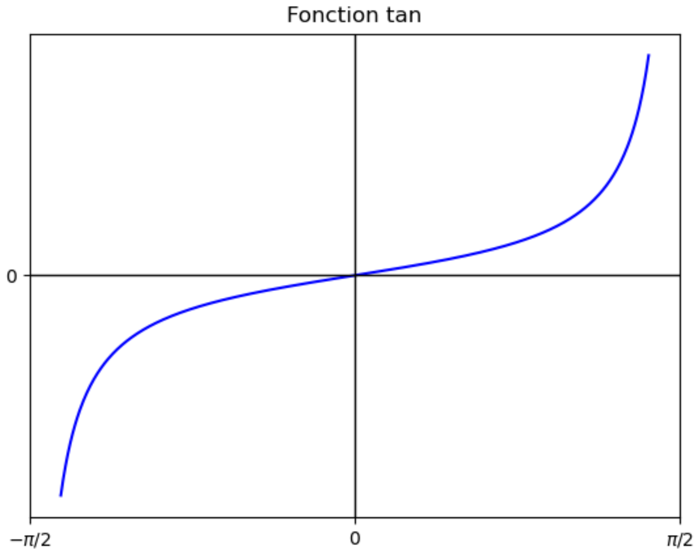
Comme $\sin'(0) = 1$ et que $\cos'(0) = 0$, le graphe de cosinus a une tangente horizontale en le point $(0, 1)$ tandis que le graphe de sinus a pour tangente la droite d'équation $y = x$ en le point $(0, 0)$.

<u>Tableau de variations de la fonction cosinus :</u>

<u>Tableau de variations de la fonction sinus :</u>

La fonction tangente

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et a $\mathbb{R}$ pour ensemble image. Elle est périodique de période π et est strictement croissante sur chacun des intervalles $]\pi/2+k\pi, \pi/2+(k+1)\pi[$. Elle tend vers $-\infty$ en $(\pi/2)^+$ et vers $+\infty$ en $(\pi/2)^-$.



La fonction tangente est dérivable là où elle est définie. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} : \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$. Donc, la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de la fonction tangente en l'origine.

Tableau de variations de la fonction tangente :

8.5.5 Fonctions puissances généralisées

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance généralisée

$$f_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha. \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on a l'égalité

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\ln(x^\alpha)) = \exp(\alpha \ln(x)),$$

qui constitue en réalité une définition. Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions puissances élémentaires, lorsque $\alpha = 1/2$ on retrouve la fonction racine carrée, lorsque $\alpha = -1$ on retrouve la fonction inverse.

f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\alpha}$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(1) = 1$. Pour étudier le comportement de f_α, il faut distinguer les cas selon que $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha < 0$.

Cas $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, alors f_α est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Cas $\alpha > 0$**.**

Si $\alpha > 0$, alors la dérivée f'_α de f_α est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, comme $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$

(justifier avec la définition via l'exponentielle).

Tableau de variations et graphe.

Cas $\alpha < 0$**.**

Si $\alpha < 0$, alors la dérivée f'_α de f_α est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, comme $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0,$$

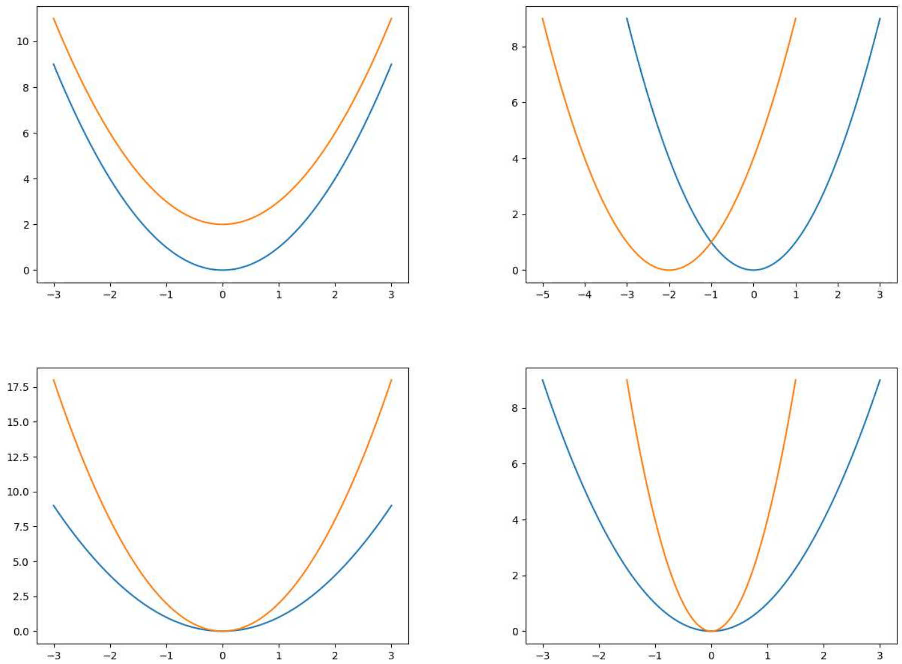
(justifier avec la définition via l'exponentielle).

Tableau de variations et graphe.

8.6 Transformations simples

Si f est une fonction dont on connaît le graphe et $a \in \mathbb{R}$, on doit être capable de retrouver rapidement les graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto af(x)$ et $x \mapsto f(ax)$.

On prend l'exemple de la fonction carrée $f(x) = x^2$, avec $a = 2$. En bleu, le graphe de f. En orange et dans l'ordre, les graphes de $x \mapsto f(x) + 2$, $x \mapsto f(x+2)$, $x \mapsto 2f(x)$ et $x \mapsto f(2x)$.



On constate les règles suivantes :

- le graphe de $x \mapsto f(x) + 2$ est obtenu en décalant de 2 vers le haut ;
- le graphe de $x \mapsto f(x + 2)$ est obtenu en décalant de 2 vers la **gauche** ;
- le graphe de $x \mapsto 2f(x)$ est obtenu en dilatant verticalement d'un facteur 2 ;
- le graphe de $x \mapsto f(2x)$ est obtenu en **contractant** horizontalement d'un facteur 2.

On généralise pour un réel a quelconque et pour f quelconque.

Propriété 8.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Alors

- Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient par translation verticale du graphe de longueur a.
- Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient par translation horizontale du graphe de longueur $-a$.
- Le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient par dilatation verticale du graphe de f d'un facteur a.
- Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ s'obtient par contraction horizontale du graphe de f d'un facteur a.

Remarque 8.17. Si a est négatif, les dilatations/contractions sont accompagnées d'un retournement vertical du graphe (c'est-à-dire une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses).

8.7 Étude de fonctions

L'étude d'une fonction passe par les étapes suivantes :

- Détermination de l'ensemble de définition
- Étude des symétries et réduction du domaine d'étude
- Étude des variations de la fonction
- Calcul des valeurs particulières, des limites
- Tracé de la courbe représentative de la fonction.

Détaillons ces étapes.

Détermination de l'ensemble de définition. On identifie les problèmes éventuels dans l'ordre dans lequel ils se posent. En pratique, on résout des équation et des inéquations.

Etude des symétries et réduction du domaine d'étude. On cherche si la fonction est paire/impaire et si elle présente une périodicité.

— Si la fonction est paire/impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

— Si la fonction est T-périodique, il suffit de l'étudier sur une période, par exemple $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.

— Si la fonction est paire/impaire et T-périodique, il suffit de l'étudier sur la *demi-période* $[0, T/2]$.

On précise clairement le domaine d'étude à la fin de cette étape. Il est donc en général plus petit que l'ensemble de définition.

Étude des variations de la fonction. Le plus souvent, cela passe par le calcul de la dérivée et l'étude de son signe. Dans certains cas, le signe de la dérivée ne pourra pas être obtenu directement ; on pourra alors calculer la dérivée seconde pour obtenir les variations de f' puis son signe...

On conclut cette étape par un tableau de variations sur le domaine d'études.

Calcul des valeurs particulières, des limites. On détermine les limites de la fonction aux bornes du domaine d'étude (y compris en les points isolés où la fonction n'est pas étudiée). On calcule aussi les valeurs de la fonction aux points où la monotonie change.

Tracé de la courbe représentative. On commence le tracé sur le domaine d'étude. En pratique, on trace la courbe la plus simple qui respecte les variations, les valeurs particulières et les limites. En les points particuliers, on peut aussi calculer la dérivée, qui donne la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

Si la fonction était paire/impaire, on en déduit le tracé sur les négatifs. Si la fonction était T-périodique, on déduit du tracé sur une période le tracé de la courbe sur tout l'ensemble de définition.

Remarque 8.18. On fait figurer clairement les asymptotes verticales et horizontales à la courbe.

— La droite (verticale) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

— La droite (horizontale) d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Exemple 8.17. • Étude de f définie par

$$f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1).$$

• Étude de g définie par

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{3 - x^2}.$$

Exercice 8.2. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$x - x^2/2 \leq \ln(1 + x) \leq x.$$