Chapitre 11

Applications

Sommaire

11.1 Définitions

Définition 11.1: Application

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F est un procédé qui à chaque élément de E associe un unique élément de F que l'on note $f(x)$.
On note cela

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle E l'*ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée*. On dit que $f(x)$ est ***l'****image* de x par f et que x est ***un*** *antécédent de* $f(x)$. L'ensemble des applications de E dans F sera noté $\mathcal{A}(E,F)$ ou bien F^E.

Exemple 11.1. 1. L'application $f: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$ est appelée application *identité* de E. On la note Id_E.

2. L'application $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$: est l'image de 2 par g, car C'est aussi l'image de -2 par g car et sont les antécédents de 9 par g, car

3. Soit A une partie de E. On définit l'application *indicatrice* de A, notée $\mathbf{1}_A$ par

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Par exemple, graphe de l'indicatrice du segment $[0,1]$:

Définition 11.2. Deux applications f et g sont dite égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ E.
- $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Définition 11.3: Ensemble image, graphe

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. On appelle *image* de A par f l'ensemble $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

On appelle *graphe* de f l'ensemble Γ défini par

$$\Gamma = \{(x, f(x))\ ,\ x \in E\}$$

Dans le cas usuel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le graphe de f est sa courbe représentative.

Exemple 11.2. • Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$. Alors $f(\mathbb{R}) =$ et $f(]-2,2[) =$.

- Soit $g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array}$. Alors $g(\mathbb{R}^2) =$, $g([0,1]^2) =$.

11.2 Injection et surjection

11.2.1 Définitions

Définition 11.4

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

- On dit que f est une surjection ou est surjective si tout élément de F admet *au moins un* antécédent par f.
- On dit que f est une injection ou est injective si tout élément de F admet *au plus un* antécédent par f.

Propriété 11.1. *Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.*

- *f est surjective si et seulement si*

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \ y = f(x)$$

- *f est injective si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Exemple 11.3. 1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est

2. $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x \end{array}$ est

3. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ est

11.2.2 Comment prouver qu'une application est injective ? surjective ?

Propriété 11.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone alors f est injective.*

Remarque 11.1. La réciproque est fausse : Une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcément monotone. Par exemple la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

est injective mais n'est pas monotone.

Méthode 11.1: Montrer qu'une fonction est surjective

Si l'exemple vous demande de montrer qu'une application f de E dans F est surjective alors il faut :

1. Poser un élément *quelconque* y de F.
2. Trouver ensuite un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, cela revient souvent à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x.
3. Si vous avez trouvé un élément x qui convient alors f est bien surjective

Méthode 11.2: Montrer qu'une fonction est injective

Si l'exemple vous demande de montrer qu'une application f de E dans F est injective alors il faut :

1. Si vous êtes dans le cas particulier de la proposition précédente vérifier si f est strictement monotone.
2. Si vous n'êtes pas dans la situation de la proposition ou si f n'est pas strictement monotone il faut poser deux éléments (x, y) quelconques de E dont on suppose qu'ils ont la même image (i.e. $f(x) = f(y)$).
3. Par divers arguments en déduire qu'alors la seule possibilité est que $x = y$. Auquel cas f est bien injective.

Exercice 11.1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y) \end{array}.$$

Remarque 11.2.
- Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, il suffit de trouver x et $y \in E$, $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$.
- Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, il suffit de trouver $y \in F$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \neq y$.

Remarque 11.3.
- Une fonction f est toujours surjective de E dans $f(E)$ par définition.
- On peut rendre une fonction injective en restreignant son domaine de définition. Par exemple, les fonctions carrées et cosinus.

11.3 Composition, bijection, application réciproque

11.3.1 Composition

Définition 11.5. Soit E, F et G trois ensembles et soit f une application de E dans F et soit g une application de F dans G.

On définit alors l'application composée de f par g, notée $g \circ f$ comme l'application qui à $x \in E$ associe $g(f(x))$:

$$g \circ f : \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Exemple 11.4. 1. Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 3 \end{array}$$

Alors

$$g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$$

2. Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+\star} \\ x \longmapsto x^2 + 1 \end{array}$$

Alors

$$g \circ f : \begin{array}{l} \quad \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \qquad \text{et} \quad f \circ g : \begin{array}{l} \quad \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array}$$

Remarque 11.4.
- Il faut prêter une grande attention aux ensembles de départ et d'arrivée de f et g.
- Soit f une application de E dans F. Alors

$$f \circ Id_E = f \qquad Id_F \circ f = f$$

Propriété 11.3. *L'opération de composition est associative et non-commutative, c'est-à-dire, si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Par contre, si a est une application de E dans F et b est une application de F dans E, alors en général $a \circ b$ et $b \circ a$ sont deux applications différentes.

Exemple 11.5. Par exemple $a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $b : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 1 \end{array}$ vérifient

$$a \circ b : \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad b \circ a :$$

donc $a \circ b \neq b \circ a$.

Propriété 11.4. *Soit $f : E \to F$ e $g : F \to G$.*

- *(La composée de deux fonctions injective est injective) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- *(La composée de deux fonctions surjectives est surjective) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*

11.3.2 Bijections

Définition 11.6

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
On dit que f est une bijection ou est bijective de E dans F si f est à la fois injective et surjective de E dans F.

Remarque 11.5. Ainsi $f : E \to F$ est bijective signifie que

$$\forall y \in F,\ \exists !\ x \in E \ /\ f(x) = y.$$

Tout élément de y de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent par E.

Exemple 11.6. Exemple d'une fonction bijective, avec représentation graphique.

Théorème 11.1

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F$$

On appelle alors g la bijection réciproque de f et on la note f^{-1}

Remarque 11.6. Il ne suffit pas de montrer l'une des deux égalités pour trouver la bijection réciproque de f, il faut absolument montrer les deux égalités, en effet il existe des applications f et g non bijectives telles que $g \circ f = Id_E$ mais $f \circ g \neq Id_F$ (cf exercice 2 du TD).

Remarque 11.7. Bilan pour une fonction de la variable réelle :

— Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective si pour tout $a \in \mathbb{R}$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe au plus une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction inverse).

— Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective si pour tout $a \in \mathbb{R}$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe au moins une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction carrée).

— Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective si pour tout $a \in \mathbb{R}$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe exactement une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction exponentielle).

Remarque 11.8. Si $f : E \to F$ est bijective, alors

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Montrer un diagramme en patate.

Propriété 11.5. *Soit f une bijection de E dans F. L'application f^{-1} est unique. Ainsi, on parle de **la** bijection réciproque de f.*

Exemple 11.7.

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ est une bijection d'inverse $f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \end{array}$.

2. $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ x \longmapsto \exp x \end{array}$ est une bijection d'inverse $g^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$.

3. La fonction inverse $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}^\star \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une bijection d'inverse

Propriété 11.6. *Soit f une bijection de E dans F de réciproque f^{-1}. Alors f^{-1} est une bijection de réciproque f. Autrement dit $(f^{-1})^{-1} = f$. On dit que l'inversion de fonctions est involutive.*

Propriété 11.7. *Soit une bijection de E dans F de réciproque f^{-1} et soit g une bijection de F dans G de réciproque g^{-1}. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G de réciproque*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Remarque 11.9. On sait que f et g sont injectives et surjectives, donc $g \circ f$ est injective et surjective, donc bijective, d'après la propriété sur la composée des applications injectives et surjectives.

Théorème 11.2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et strictement monotone sur I. Notons $J = f(I)$. Alors f est bijective de I dans J.

On rappelle le théorème des valeurs intermédiaires, que nous admettons pour le moment :

Théorème 11.3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.
Autrement dit, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Remarque 11.10. Attention, on peut avoir $f(a) > f(b)$ (par exemple si f est décroissante sur I).

En couplant le théorème 11.2 et le théorème 11.3, on obtient le théorème de la bijection :

Théorème 11.4
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et strictement monotone sur I. Notons $J = f(I)$. Alors

- *J est un intervalle de I.*
- *f est bijective de I dans J.*

Exemple 11.8.
- La fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
- Pour tout $y \in [0, 2]$, il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $y = x^3 + x$.

Méthode 11.3: Prouver qu'une fonction f est bijective

Plusieurs méthodes :

1. Montrer que f admet une fonction réciproque : si il existe une fonction $g : F \to E$ telle que
$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E$$
alors f est bijective de E dans F (et g également).
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g, cela revient à montrer que
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y).$$
3. Utiliser le théorème 11.2
4. Montrer que f est injective et surjective (quand on n'a pas d'autres solutions).

Exemple 11.9.
1. Fonction exponentielle et logarithme.
2. Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est bijective.
3. La fonction g : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+2}{x-4} \end{array}$ est bijective.

Remarque 11.11. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit f une bijection de I dans J d'inverse f^{-1}. Alors le graphe de f et le graphe de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

Remarque 11.12. Graphe des fonctions exponentielle et logarithme

Remarque 11.13. Tableau des bijections usuelles et de leurs réciproques : (présenter $f : I \to J$, avec I ensemble de départ, J ensemble d'arrivée, $f^{-1} : J \to I$).