Chapitre 13

Matrices

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ses éléments sont appelés des **scalaires**. De plus, si $r, s \in \mathbb{N}$, on note $[\![r, s]\!] = \{r, r+1, \ldots, s-1, s\}$ si $r \leq s$ et $\emptyset$ sinon.

13.1 Définitions

13.1.1 L'ensemble des matrices

Définition 13.1. Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle matrice de taille $n,\ p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée de $n \times p$ scalaires a_{ij} où $i \in [\![1, n]\!]$

et $j \in [\![1, p]\!]$, représentés sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

- L'ensemble des matrices de taille $n,\ p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- On note aussi, de manière plus synthétique, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

Exemple 13.1.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$,
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} & \\ \frac{3}{4} & 0 & -1 & \\ -\frac{5}{2} & 2 & 7.1 & \\ 1000 & -\pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

Définition 13.2. Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne.
- Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne.
- Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la place de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 13.2. Par exemple

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.
- $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice carrée.

Remarque 13.1.

- On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$.
- Pour $n, p \in \mathbb{N}^\star$, on note $0_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de taille n, p dont tous les coefficients valent 0, appelée matrice nulle. S'il n'y a aucune ambiguité sur sa taille, on note plus simplement 0.

Exemple 13.3.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13.1.2 Matrices carrées particulières

Définition 13.3: Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que

- A est une matrice triangulaire supérieure si et seulement si
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$
- A est une matrice triangulaire inférieure si et seulement si
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$
- A est une matrice diagonale si et seulement si
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$
Dans ce cas, on note également $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemple 13.4.

- Les coefficients d'une matrice trianglaire supérieure situés sous la diagonale sont tous égaux à 0. Les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
sont triangulaires supérieures.
- Les coefficients d'une matrice trianglaire inférieure situés au-dessus de la diagonale sont tous égaux à 0. Les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ -3 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
sont triangulaires inférieures.
- Les coefficients d'une matrice diagonale situés hors de la diagonale sont tous égaux à 0. Les matrices
$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
sont diagonales.

Définition 13.4: Matrice identité

On appelle matrice identité d'ordre n, et on note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 13.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
- On dit que A est anti-symétrique si $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemple 13.5.

- La matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1.5 & -5 \\ 1 & -5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
est symétrique.
- La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$
est antisymétrique.

Propriété 13.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad a_{ii} = 0,$$

autrement dit tous les coefficients diagonaux de A sont nuls.

13.2 Opération sur les matrices

13.2.1 Egalité

Définition 13.6. On dit que deux matrices A et B sont égales si A et B ont même taille et si elles ont les mêmes coefficients.

13.2.2 Addition de matrices

Définition 13.7. Soit A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et de B, notée $A+B$, est la matrice définie par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Remarque 13.2. Attention, on ne peut additionner que des matrices de même taille !

Exemple 13.6. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -9 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + B$. Peut-on calculer $A + C$? $B + C$?

Propriété 13.2: Propriétés de l'addition

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ trois matrices.

- L'addition est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$.
- L'addition est commutative : $A + B = B + A$.
- $O_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition : $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$.
- Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, on définit la matrice $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, on dit que $-A$ est l'opposée de A. On a $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.

13.2.3 Multiplication par un scalaire

Définition 13.8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de λ et de A, noté λA est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}.$$

Exemple 13.7. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, tandis que $1A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$ et $-1A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -A$ est l'opposé de A.

Propriété 13.3. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

- *Associativité : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$.*
- *Elément neutre : $1A = A$.*
- *Distributivité : $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*

Exercice 13.1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer $3A - 2B$.

13.2.4 Produit matriciel

La multiplication terme à terme des matrices n'est pas l'opération intéressante ici. Il s'agit de construire une multiplication qui s'accorde avec la résolution des systèmes.

Définition et propriétés

Définition 13.9. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit de A par B, noté $A \times B$ ou encore AB comme la matrice $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

Exemple 13.8. Mise en pratique : si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \dots$ et $BA = \dots$.

Remarque 13.3. Le produit AB n'est correctement défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Méthode 13.1: Multiplication de matrices

Pour visualiser le calcul, on écrit, au brouillon

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,q} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_{k,q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}b_{k,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 13.9. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \dots$. Peut-on définir le produit BA ?

Exemple 13.10 (Produits matrices lignes, matrices colonnes). On note $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

— Le produit LC est bien défini si et seulement si $p = q$ et dans ce cas $LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, autrement dit LC est un scalaire !

$$LC = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$$

. Par exemple $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \dots$

— Le produit CL est toujours bien défini, et $CL \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$ et a pour coefficients $c_{ij} = b_i a_j$. Par exemple $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \dots$

Remarque 13.4. Pour comprendre l'intérêt de cette multiplication, il faut revenir aux systèmes linéaires

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Si l'on pose les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si $AX = B$. Résoudre le système, c'est donc résoudre l'équation d'inconnue X : $AX = B$. On vient de transformer un système de n équations à p inconnues, en un simple système linéaire à une seule inconnue. Si on travaillait dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, il suffirait de diviser l'équation par a (s'il est non nul) pour obtenir x. Malheureusement, ce n'est pas aussi facile avec les matrices car en général on ne peut pas diviser par A, c'est-à-dire multiplier par l'inverse A^{-1} car cette matrice n'existe pas en général. Et même quand cette matrice existe, elle est difficile à calculer. Ce sera un des problèmes majeurs de ce chapitre.

Propriété 13.4: Propriétés de la multiplication matricielle

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a les propriétés suivantes :

- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
- Associativité de la multiplication matricielle : $A(BC) = (AB)C = ABC$.
- Distributivité de la multiplication sur l'addition matricielle : $A \times (B + C) = AB + AC$.
- L'identité est l'élément neutre : $I_n A = A I_p = A$ (attention à la taille de la matrice identité).

Propriété 13.5.

- *Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).*
- *Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale :*

$$\mathit{diag}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \times \mathit{diag}(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = \mathit{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_n b_n)$$

Remarque 13.5. Cette remarque permet de simplifier le calcul d'un produit de matrices triangulaires : pour calculer le produit de 2 matrices triangulaires supérieures, il n'est pas nécessaire de calculer les termes sous la diagonale.

Remarque 13.6 (Non-commutativité du produit matriciel.). Très important : le produit matriciel n'est pas commutatif. Autrement dit, il n'y a aucune raison en général que $AB = BA$!

Exemple 13.11. Si le produit AB est bien défini, le produit BA ne l'est pas forcément. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exemple 13.12. Si AB et BA sont bien définis, ils n'ont pas nécessairement la même taille. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Exemple 13.13. Si AB et BA sont bien définis et ont la même taille, ils ne sont pas forcément égaux. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Remarque 13.7 (Le produit matriciel n'est pas intègre.). Il existe des matrices $A \neq 0$ et $B \neq 0$ tels que $AB = 0$. Par exemple, l'exemple 13.12 ou

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Ceci a pour conséquence qu'on ne peut pas simplifier par une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C,$$

par exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule $AB = AC$, et pourtant $B \neq C$.

Puissances d'une matrice carrée

Remarque 13.8.
- Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est toujours bien défini (mais n'est pas commutatif).
- I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 13.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les puissances de A sont définies par récurrence par

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A^p A = A A^p.$$

Propriété 13.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

1. $I_n^p = I_n$.
2. $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $A^{p+q} = A^p A^q = A^q A^p$ *et* $(A^p)^q = A^{pq} = (A^q)^p$.
3. $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$.

Exemple 13.14 (Matrices nilpotentes). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ alors on dit que A est nilpotente. Dans ce cas, pour tout $m \geq p$,

$$A^m = A^{m-p}A^p = 0.$$

Cas particulier à reconnaître : les matrices triangulaires à diagonale nulle.

Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le fait de prendre les puissances successives de M décale le triangle.

Propriété 13.7 (Puissances d'une matrice diagonale). $\forall p \in \mathbb{N}$ *et* $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 13.15. Par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$.

Théorème 13.1 (Formule du binôme de Newton)
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} B^k A^{p-k}.$$

Remarque 13.9. Attention, cette formule est fausse si les matrices ne commutent pas, par exemple si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Exemple 13.16. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons M^p pour $p \in \mathbb{N}$.

13.2.5 Transposée d'une matrice

Définition, propriétés, caractère involutif, caractérisation des matrices symétriques, antisymétrique.

Définition 13.11. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice définie par

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemple 13.17. Ainsi, la transposition échange lignes et colonnes. La k-ème ligne de A devient la k-ème colonne de ${}^tA$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 3 & 4 & 0.5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ i & 0.5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

Propriété 13.8. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors ${}^t({}^tA) = A$.*

Propriété 13.9. *Si $D \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice diagonale, alors ${}^tD = D$.*

Propriété 13.10. *Si $T \in \mathcal{M}_nK$ est une matrice triangulaire supérieure, alors ${}^tT$ est une matrice triangulaire inférieure.*

Exemple 13.18. Deux exemples.

Propriété 13.11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

1. *A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.*
2. *A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.*

Propriété 13.12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad a_{ii} = 0.$$

Propriété 13.13 (Linéarité)**.** *Soit A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

1. *${}^t(A + B) ={}^t A +^t B$.*
2. *${}^t(\lambda A) = \lambda^t A$.*

Remarque 13.10. Ces deux points sont équivalents au fait que ${}^t(\lambda A + B) = \lambda^t A +^t B$.

Propriété 13.14. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors*

$${}^t(AB) ={}^t B^t A.$$

Donc si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, alors ${}^t(A)^n ={}^t (A^n)$.

Propriété 13.15. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A^tA est une matrice symétrique.*

13.3 Matrices inversibles

13.3.1 Définition et propriétés générales

Dans le cas des nombres réels ou complexes, si $a \neq 0$ et $x, y \in \mathbb{K}$, on a

$$ax = ay \Leftrightarrow x = y.$$

Pour obtenir cette équivalence, on multiplie l'égalité de gauche par $1/a$ à gauche et à droite, l'inverse de a. C'est l'existence d'un inverse qui permet de "simplifier par a", c'est-à-dire l'existence d'un nombre b tel que $ab = 1$. Tous les nombres complexes non nuls ont un inverse. La situation est plus compliquée pour les matrices.

Définition 13.12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est unique, on dit que c'est l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Remarque 13.11. • On note bien A^{-1} et non pas $1/A$.

- La matrice nulle n'est jamais inversible.
- Attention une matrice non nulle n'est pas forcément inversible. Par exemple, si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices non nulles vérifiant $AB = 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
- I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Exemple 13.19. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété 13.16. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = AC$ alors $B = C$.*

Propriété 13.17. *Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

- *Si A est inversible, alors $(A^{-1})^{-1} = A$ (l'inversion est une* **involution***).*
- *Si $\lambda \neq 0$ et si A est inversible alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.*
- *Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
- *Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

13.3.2 Méthode : montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

Utilisation d'un polynôme matriciel

Considérons

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et calculons $M^2 + M - 2I_2 = 0$.

On isole I_2 et on en déduit que $M \times \left(\frac{1}{2}(M + I_2)\right) = \frac{1}{2}(M + I_2)M = I_2$.

Ainsi M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M + I_2)$.

Cas particulier des matrices d'ordre deux

Définition 13.13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, noté det A, le scalaire défini par

$$\text{det } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 13.20. Déterminant de $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, déterminant de $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$.

Théorème 13.2
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si det $A \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\textit{det } A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 13.21. La matrice $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant est nul tandis que $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est...

Pour conclure ce chapitre, il nous reste à étudier l'inversibilité des matrices en établissant le lien entre matrices et systèmes linéaires.

13.4 Inversion de matrices par la résolution de systèmes linéaires

13.4.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ -3x + 2y + z = -1, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13.12. De manière générale, le système

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

est équivalent à $AX = B$ où l'on a posé

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 13.13. La i-ème ligne de A contient les coefficients de la i-ème ligne de (S), idem pour les j-ème colonne.

Remarque 13.14. Si $p = n$ et si A est inversible alors $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$! Donc si l'on connaît l'inverse de A on est capable de résoudre le système linéaire $Ax = b$ simplement en multipliant $A^{-1}b$.

Réciproquement, si on sait résoudre le système linéaire $Ax = b$ pour tout second membre b alors on connaît l'inverse de A. C'est ce résultat que l'on exploite pour calculer l'inverse de A.

Exemple 13.22. Écrire les systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrl} 2x & - & 3y & = 4, \\ -3x & + & 2y & = -1, \end{array}\right. ,(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 3y & + & z & = 1, \\ -8x & + & 2y & + & z & = 2, \\ 5x & - & y & - & 3z & = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 8y & + & z & = 1, \\ & & 2y & + & z & = 2, \\ & & & - & 6z & = 1. \end{array}\right.$$

sous forme matricielle.

13.4.2 Résolution matricielle d'un système linéaire

Il s'agit d'écrire matriciellement la méthode du pivot de Gauss appliquée à un système linéaire.

Exemple 13.23. On reprend l'exemple du système précédent :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & y & + & z & = 2, \\ -3x & + & 2y & + & z & = -1, \\ 2x & - & y & - & z & = 0. \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss à (S) :

On met le système échelonné obtenu sous forme matricielle $RX = B_1$ avec

$$R = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Comment passer de A à R, de B à B_1 ?

On reprend d'un point de vue matriciel le vocabulaire des systèmes linéaires.

Opérations élémentaires matricielles

Définition 13.14. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle opération élémentaire sur les lignes de A les opérations suivantes :

- **Échange** : on permute les lignes L_i et L_j, avec i et j deux indices distincts. (notation $L_i \leftrightarrow L_j$)
- **Transvection** : on ajoute à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j. (notation $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$)
- **Multiplication** : on multiplie une ligne L_i par un scalaire λ non nul. (notation $L_i \leftarrow \lambda L_i$)

Définition 13.15. Une matrice échelonnée en ligne si le nombre de coefficients nuls en début de ligne augmente strictement avec l'indice de la ligne (si, pour un indice, tous les coefficients de la ligne sont nuls, on demande que tous les coefficients des lignes en-dessous soient nuls aussi).

Remarque 13.15. Une matrice carrée échelonnée en ligne est . . . .

Exemple 13.24. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont échelonnées en ligne mais pas la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mise en oeuvre matricielle

Exemple 13.25. On reprend l'exemple précédent. Dans l'exemple précédent,

$$AX = B \Longleftrightarrow$$

On applique la méthode du pivot de Gauss directement à A :

On s'arrête quand la matrice obtenue est échelonnée et on écrit le système linéaire associé (qui est lui aussi échelonné !).

La matrice échelonnée R obtenue s'appelle réduite de Gauss de A. Comme pour les systèmes, la réduite de Gauss n'est pas unique.

Que reste-t-il à faire pour terminer la résolution du système ?

Rang d'une matrice

Exemple 13.26. On reprend l'exemple précédent. On a obtenu

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & + & z & = 2, \\ & - & y & + & 4z & = 5, \\ & & & & z & = 1. \end{array}\right. \iff RX = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entourez les pivots de (S) et les pivots de R, comparez. Que peut-on en déduire ?

Définition 13.16. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, noté rg(A), l'une des quantités suivantes (qui sont toutes égales) :

- le rang de tout système linéaire de matrice A,
- le rang de toute réduite de Gauss d'un système linéaire de matrice A,
- le nombre de pivots d'une réduite de Gauss de A.

Exemple 13.27. Dans l'exemple précédent, on a vu que la matrice échelonnée R était une réduite de Gauss de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On en déduit que le rang de A vaut ...

D'après le cours sur les systèmes linéaires, on a la propriété suivante.

Propriété 13.18. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors rg*$(A) \leq \min(n, p)$.

Théorème 13.3 (Admis)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors rg*$(A) =$ *rg*$({}^tA)$

Exemple 13.28. Calculer le rang des matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.4.3 Application : existence et calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Existence de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à répondre aux questions suivantes : A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

Théorème 13.4
Soit A et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible et $A^{-1} = C$ si et seulement si pour tous vecteurs colonnes $x, b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cb.$$

Théorème 13.5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si tout système linéaire de matrice A est un système de Cramer.

Propriété 13.19 (Rappel). *Soit (S) système linéaire à n équations et n inconnues et de rang r.*

- *Le système (S) est de Cramer si et seulement si $r = n$.*
- *Si $r < n$, le système est incompatible ou possède une infinité de solutions.*

Donc on en déduit que

Théorème 13.6
A est inversible si et seulement si rg$(A) = n$.

Ce théorème ne donne pas l'expression de A^{-1} mais seulement son existence.

Remarque 13.16 (Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2). Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \det(A) \neq 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{rg}(A) = 2.}$$

Dans ce cas, en notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on sait que det$(A) =$

et ainsi $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

Exercice 13.2. Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ x + 2y = -1, \end{cases}$$

en utilisant l'inversion d'une matrice carrée de taille 2.

Calcul pratique de l'inverse

Le rang, calculé via la méthode de Gauss, permet donc de savoir si une matrice A est inversible. Mais la méthode de Gauss, va plus loin : elle permet d'obtenir l'inverse de A.

Remarque 13.17. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par la connaissance de Mb, pour $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque.

Exemple 13.29. Ainsi, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que

$$\forall\, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad Mb = \begin{pmatrix} -b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ -2b_1 - 4b_3 \\ b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

alors $M = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$

Ainsi, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, pour déterminer A^{-1}, on utilise le fait que $A^{-1}b$ est l'unique solution du système $Ax = b$.

Méthode 13.2: Déterminer l'inverse d'une matrice par l'algorithme du pivot de Gauss

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice (en général dans les exercices on aura $n = 3$). On cherche à savoir si M est inversible, et si c'est le cas quel est son inverse.

1. On pose $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ quelconque.
2. On résout le système linéaire $Mx = b$, d'inconnue $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Si pour tout b ce système possède une unique solution x, alors M est inversible et on lit les coefficients de M^{-1} dans l'expression de $x = M^{-1}b$.

L'étape 2 se fait par l'algorithme du pivot de Gauss, soit sur le système linéaire associé soit directement sur la matrice augmentée.

Exemple 13.30. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

Remarque 13.18.
- Afin de ne pas se perdre dans les calculs, pensez à noter les opérations. Rappel : **une résolution sans opérations indiquées ne sera pas prise en compte.**
- On fait en quelque sorte 2 pivots de Gauss successifs : un vers le bas pour échelonner la matrice et un vers le haut pour résoudre le système.
- Résoudre le système $Ax = b$ c'est calculer $x = A^{-1}b$. En terme de matrice augmentée, c'est passer de $(A|b)$ à $(I_n|A^{-1}b)$.
- Distinguez bien s'il est nécessaire d'utiliser la matrice augmentée ou non :
  1. Si on demande de montrer que A est inversible (mais qu'on ne demande pas son inverse), alors
  2. Si on demande de montrer que A est inversible et qu'on demande de calculer son inverse, alors

Exercice 13.3. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles et calculer leur inverse.