Chapitre 14

Suites réelles

Sommaire

14.1 Vocabulaire

14.1.1 Propriétés générales

On rappelle qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (encore notée $(u_n)_n$ ou (u_n)) est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ d'un réel u_n. Formellement, c'est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 14.1: Suite majorée, suite minorée, suite bornée

On dit que (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

On dit que (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite :

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

On dit que (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Propriété 14.1. *Une suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M.$$

Exemple 14.1.

- La suite $u_n = n$ est ......
- La suite $v_n = -n$ ...
- La suite $w_n = (-1)^n n$ ...
- La suite $x_n = \cos(n)$ ...

Propriété 14.2. *La somme et le produit de deux suites bornées sont des suites bornées. Autrement dit si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées, alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.*

Attention 14.1. Le produit de deux suites majorées n'est pas nécessairement une suite majorée. Prendre par exemple $u_n = v_n = -n$.

Définition 14.2: Suite croissante, suite décroissante, suite monotone

On dit que (u_n) est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}.$$

On dit que (u_n) est *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}.$$

On dit que (u_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 14.1.

— La suite (u_n) est croissante ssi

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : (m \leq n) \implies (u_m \leq u_n).$$

— Une suite qui est à la fois croissante et décroissante est constante.

— Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut suivant les cas étudier la différence $u_{n+1} - u_n$ et la comparer à 0 ou le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1. Parfois aussi faire une étude de fonction peut aider.

Exemple 14.2.

- La suite (n^2) est ...
- La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ...

Définition 14.3 (Suite extraite)**.** La suite extraite de (u_n) des termes d'indice pair est la suite (u_{2n}). Celle des termes d'indice impair est la suite (u_{2n+1}).

On conserve donc un terme sur deux dans la suite de départ.

14.1.2 Limites

Définition 14.4: Limite finie

Soit l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) a pour limite l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Remarque 14.2. La définition dit qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont proches de l, la proximité étant quantifiée par le réel ε. Bien sûr, le rang à partir duquel cette propriété est satisfaite dépend du ε ; l'ordre des quantificateurs est important !

Remarque 14.3. Dans certains cas, il est important de savoir qu'une suite (u_n) tend vers l, tout en étant supérieure à l (à partir d'un certain rang). On dit alors qu'elle tend vers l^+.

Définition analogue pour (u_n) tendant vers l^-.

Définition 14.5: Limite infinie

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si

Remarque 14.4. La définition dit qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont au-dessus d'un plancher A, préalablement défini.

Propriété 14.3 (Unicité de la limite)**.** *Une suite (u_n) a au plus une limite (finie ou infinie).*

Notation 14.1. On écrit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

(ou $\pm\infty$) ou simplement

$$u_n \underset{n \to \infty}{\to} l$$

pour donner la valeur de la limite de (u_n). Attention, cette écriture ne peut être employée que quand on sait déjà que la suite (u_n) a une limite.

Définition 14.6: Suite convergente

On dit que (u_n) *converge* si elle a une limite finie. On dit que (u_n) *diverge* sinon.

Attention 14.2. La notion de divergence regroupe donc différentes possibilités. Une suite divergente peut

— tendre vers $+\infty$, p. ex. $u_n = n$;

— tendre vers $-\infty$, p. ex. $u_n = -n$;

— n'avoir aucune limite, p. ex. $u_n = (-1)^n$ (voir plus bas).

Propriété 14.4

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 14.5. La réciproque est fausse !

Théorème 14.1 (Limite des suites extraites)
La suite (u_n) tend vers l (finie ou infinie) ssi les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l.

Remarque 14.6. On utilise souvent cette propriété et l'unicité de la limite pour montrer qu'une suite *n'a pas* de limite. Si on peut extraire de (u_n) deux suites tendant vers des limites différentes, alors (u_n) ne peut pas avoir de limite (car si (u_n) avait une limite, les deux suites extraites devraient avoir cette même limite).

Exemple 14.3. La suite (u_n) donnée par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. En effet, la suite (u_{2n}) est constante égale à 1, donc converge vers 1, tandis que la suite (u_{2n+1}) est constante égale à -1, donc converge vers -1.

14.2 Révisions sur les limites

14.2.1 Opérations élémentaires

On rappelle que les opérations $+, -, \times, /$ peuvent être étendues aux valeurs $\pm\infty$, sauf dans certains cas particulier appelées formes indéterminées :

— $(+\infty) + (-\infty)$

— $(+\infty) - (+\infty)$

— $(-\infty) - (-\infty)$

— $\infty \times 0$

— ∞/∞

— $0/0$

sont toutes des formes indéterminées.

On fera bien attention au signe pour étendre les opérations usuelles aux infinis. Par exemple, $1/0^+ = +\infty$ et $1/0^- = -\infty$. En particulier, si on sait seulement qu'une suite (u_n) tend vers 0, on ne peut rien dire *a priori* de la suite $(1/u_n)$.

Avec ces conventions, on peut énoncer le principe général d'opérations sur les limites.

Propriété 14.5. *Si deux suites (u_n) et (v_n) ont une limite (finie ou infinie), alors la somme/la différence/le produit/le quotient de (u_n) et (v_n) tend vers la somme/la différence/le produit/le quotient des limites, si cette opération n'est pas une forme indéterminée.*

Concrètement, cela nous donne les opérations suivantes sur les limites

Propriété 14.6: Opérations sur les limites

Soient l_1, l_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Limite éventuelle de la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	l_2	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
	$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

- Limite éventuelle du produit par un scalaire $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
Signe de λ	$\lambda > 0$	λl_1	$+\infty$	$-\infty$
	$\lambda = 0$	0	0	0
	$\lambda < 0$	λl_1	$-\infty$	$+\infty$

- Limite éventuelle du produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$				
		l_1<0	$l_1 = 0$	$l_1 > 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	$l_2 > 0$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_2 = 0$	0	0	0	F.I	F.I
	$l_2 < 0$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Limite éventuelle du quotient $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$					
$l_1 \neq 0$	0^+	0^-	0	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{l_1}$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	0^+	0^-

Exemple 14.4. Étudier la limite éventuelle des suites définies par les relations suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2-n}{3+n^2}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{2n^2-5}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2-n^2}{3+n^2}$

14.2.2 Composition de limites

On suppose connues les notions de limite et de continuité pour une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 14.2 (Composition de limites)
On suppose qu'une suite (u_n) tend vers une limite l (finie ou infinie) et que la limite de f en l existe et est égale à un certain a (fini ou infini).
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a.$$

Corollaire 14.1 (Cas particulier)**.** *Si $\lim_n u_n = l \in \mathbb{R}$ et si f est continue en l, alors*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l).$$

Exemple 14.5. Déterminer la limite des suites suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{3n+7}$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$.

14.2.3 Limites et inégalités

Théorème 14.3: Passage à la limite et inégalité

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 0.$$

On suppose que (u_n) est convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$l \geq 0.$$

Corollaire 14.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limite respective l et l'. On suppose que pour tout n, $u_n \geq v_n$. Alors $l \geq l'$.*

Attention 14.3. Si on a une inégalité stricte $u_n > v_n$, on ne garde que l'inégalité large en passant à la limite.

Penser par exemple à $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$, de limite commune 1.

On fera bien attention au fait que, dans ce théorème et son corollaire, on *suppose* l'existence des limites. La situation est très différente dans le théorème suivant, qui *prouve* la convergence d'une suite.

Théorème 14.4: Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n.$$

On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers l. Alors (v_n) converge vers l.

On a un résultat analogue avec des limites infinies.

Propriété 14.7: Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.
- Si (v_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple 14.6. Étudier la convergence des suites données par
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + n + 2$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \cos(n) - 2n^2$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{\sin(n) + n^2}{n+1}$.

On dispose également du résultat suivant, très utile en pratique.

Propriété 14.8. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $0 \in \mathbb{R}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Exemple 14.7. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

14.2.4 Théorème de la limite monotone

On effectue de rapides rappels sur les notions de borne inférieure et supérieure (voir le chapitre sur les nombres réels).

Définition 14.7. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Le plus petit majorant de A est la *borne supérieure* de A.

Exemple 14.8. — $A = [0, 1]$ a pour borne supérieure 1 ; c'est un élément de A.

— $A = [0, 1[$ a pour borne supérieure 1 ; ce n'est pas un élément de A.

— $A = \{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots\}$ a pour borne supérieure 2 ; ce n'est pas un élément de A.

— $A = \mathbb{N}$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$; elle n'a pas de borne supérieure.

Ainsi, on voit apparaître une distinction importante parmi les parties majorées de $\mathbb{R}$: celles qui ont un plus grand élément (dans ce cas, c'est la borne supérieure) et celles qui n'ont pas de plus grand élément (mais qui ont quand même une borne supérieure).

On peut de même définir la notion de *borne inférieure*, pour une partie minorée.

Théorème 14.5: Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

— Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente (et sa limite vaut $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

— Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente (et sa limite vaut $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

Attention 14.4. Ce n'est pas parce qu'une suite croissante est majorée par 2 qu'elle converge vers 2. Le théorème affirme seulement qu'elle converge et que sa limite est inférieure ou égale à 2.

Corollaire 14.3 (Alternative pour les suites monotones)**.**

— *Une suite croissante converge ou diverge vers* $+\infty$.

— *Une suite décroissante converge ou diverge vers* $-\infty$.

Attention 14.5. Une suite non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$, par exemple la suite

$$((-1)^n + 1)n)_{n\in\mathbb{N}}$$

n'est pas majorée mais ne tend pourtant pas vers $+\infty$.

14.3 Suites adjacentes

Définition 14.8. Deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si une des deux suites est croissante, l'autre décroissante et si la différence $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Exemple 14.9. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Théorème 14.6: Suites adjacentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ et de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n.$$

Exemple 14.10. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

14.4 Comparaisons asymptotiques

14.4.1 Théorèmes de croissance comparée

On s'intéresse au comportement relatif des suites de termes généraux $n!$, n^α (pour $\alpha > 0$) et a^n (pour $a > 1$). Ces trois suites tendent vers $+\infty$; on va montrer qu'elles n'y tendent pas à la même vitesse.

Propriété 14.9: Comparaison de $n!$ et a^n

Soit $a > 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

Remarque 14.7. La proposition est encore vraie si $a \geq 0$ mais, pour $a \in]0,1[$, il n'y a pas de forme indéterminée. En effet, si $a \in]0,1[$ alors

Propriété 14.10: Comparaison de a^n et n^α

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Propriété 14.11 (Autres comparaisons)**.** *Soient $\alpha > 0$ et $b > 0$. On a :*

- *Le quotient $\frac{n!}{n^\alpha}$ tend vers $+\infty$.*
- *Le quotient $\frac{n^\alpha}{(\ln n)^b}$ tend vers $+\infty$.*

Exemple 14.11. Étudier la limite lorsque $n \to +\infty$ des quantités suivantes :

1. $\dfrac{n!}{2^n}$
2. $\dfrac{3^n}{n^2}$
3. $\dfrac{\ln n}{n}$
4. $\dfrac{e^n}{n}$
5. $\dfrac{n!}{n^1000}$
6. $\dfrac{n}{(\ln n)^6}$

14.4.2 Équivalents

On suppose que toutes les suites considérées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Définition 14.9: Suites équivalentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* et on écrit $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Exemple 14.12. On a les équivalents suivants :

1. $n^2 + n - \dfrac{3}{n} \sim n^2.$

2. $\dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2} \sim \dfrac{3}{n}.$

Remarque 14.8. La notion d'équivalent permet en quelque sorte d'isoler la partie prédominante lorsque $n \to \infty$ dans le terme général d'une suite.

Propriété 14.12. *La notion d'équivalence sur les suites a les propriétés suivantes : (on considère (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites)*

— *réflexivité : $u_n \sim u_n$;*

— *symétrie : si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$;*

— *transitivité : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Pour les suites ayant une limite, la notion d'équivalent est intéressante quand cette limite est nulle ou infinie.

Propriété 14.13. *Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \sim l$ ssi u_n converge vers l.*
*(*à droite, on parle de la suite constante égale à l*)*

Attention 14.6. Une suite n'est jamais équivalente à la suite nulle. Ni au symbole infini (on ne dit pas que u_n est équivalente à $+\infty$ mais qu'elle tend vers $+\infty$).

Propriété 14.14. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors*

— *u_n tend vers une limite (finie ou infinie) ssi v_n tend vers la même limite.*

— *A partir d'un certain rang, (u_n) et (v_n) ont le même signe.*

La notion d'équivalence des suites se comporte bien par multiplication/division/puissances.

Propriété 14.15. *Soient (u_n), (u'_n), (v_n) et (v'_n) quatre suites telles que $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

— $u_n v_n \sim u'_n v'_n$

— $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u'_n}{v'_n}$

— $u_n^\alpha \sim {u'_n}^\alpha$.

Attention 14.7. L'équivalence des suites ne fonctionne pas bien avec l'addition (ou la soustraction), ni avec la composition :

— $n^2 + n \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais on n'a pas $n \sim 0$.

— $n + 1 \sim n$ mais on n'a pas $e^n \sim e^{n+1}$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n}$ est la suite constante égale à e.

On dispose de deux méthodes principales pour obtenir des équivalents.

Propriété 14.16. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers $+\infty$, alors $u_n + v_n \sim u_n$.*

Exemple 14.13. — D'après les théorèmes de croissance comparée, on a ainsi $n^\alpha + a^n \sim a^n$ pour tous $a > 1$ et $\alpha > 0$.

— Soit $P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_0$ une suite polynomiale, avec $a_0, \dots, a_d$ des constantes réelles et $a_d \neq 0$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$. On en déduit notamment que $P(n)$ est du signe de a_d quand n est assez grand.

Théorème 14.7 (Équivalents donnés par la dérivée)
Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I contenant $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$.

Alors $f(a + u_n) - f(a) \sim f'(a) u_n$.

Propriété 14.17 (Équivalents usuels)**.** *On en déduit les équivalents suivants, avec (u_n) une suite tendant vers 0 :*

— $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$;

— $\ln(1 + u_n) \sim u_n$;

— $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$;

— $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$;

— $\sin u_n \sim u_n$ *(approximation des petits angles)* ;

— $\tan u_n \sim u_n$.

On a aussi $\cos u_n - 1 \sim -\frac{1}{2} u_n^2$.