Chapitre 15

Sommes doubles

Sommaire

Dans tout ce document, $n, p, n_0, n_1, p_0, p_1, \ldots$ désignent des entiers ad-hoc, et on considère pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ des nombres complexes $a_{i,j} \in \mathbb{C}$.

15.1 Sommes doubles “rectangulaires”

Dans ce paragraphe, on cherche à calculer des sommes du type $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$. C'est-à-dire qu'on cherche à déterminer la somme de tous les $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$.

Notation : lorsque $n = p$ on note $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$

15.1.1 Sommations par lignes et par colonnes

Rangeons les nombres $a_{i,j}$ dans un tableau à n lignes et p colonnes dans lequel $a_{i,j}$ est placé à la ligne i, colonne j.

Pour calculer $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$, on peut d'abord faire la somme sur chacune des lignes :

$$\begin{array}{ccccccl}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & \longrightarrow & a_{1,1} + \ldots + a_{1,j} + \ldots + a_{1,p} = \sum \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & \longrightarrow & a_{i,1} + \ldots + a_{i,j} + \ldots + a_{i,p} = \sum \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} & \longrightarrow & a_{n,1} + \ldots + a_{n,j} + \ldots + a_{n,p} = \sum
\end{array}$$

Conclusion : en sommant ligne par ligne, on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} = \sum \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right)$$

Pour calculer $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$, on peut aussi faire la somme sur chacune des colonnes :

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\sum & & \sum & & \sum
\end{array}$$

Conclusion : en sommant colonne par colonne, on obtient

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{i,p} = \sum \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Finalement : $\boxed{\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Remarque : Les indices ne commencent pas forcément à 1. Plus généralement, on a :

$$\sum_{\substack{n_0\leq i\leq n_1\\p_0\leq j\leq p_1}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n_1}\left(\sum_{j=p_0}^{p_1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p_0}^{p_1}\left(\sum_{i=n_0}^{n_1} a_{i,j}\right)$$

Plus généralement encore, on peut sommer sur des indices (i,j) appartenant à n'importe quel produit cartésien : $I\times J$ (c'est-à-dire pour tous les couples (i,j) avec $i\in I$ et $j\in J$) et alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

Remarque : Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :

Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_j =$

De même, Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_i =$

Exercice 15.1. Calculer $S_1 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} 1,\ S_2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} i,\ S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$ et $S_4 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij.$

15.1.2 Cas des termes séparables

On s'intéresse au cas particulier où $a_{i,j}$ s'écrit $a_{i,j} = a_i b_j$.

Propriété 15.1. *Soient* $a_1, \dots a_n,\ b_1, \dots, b_p \in \mathbb{C}$. *On a :*

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$$

Démonstration :

Exercice 15.2. Écrire sous forme d'une somme double : $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Exercice 15.3. Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$: $S_5 = \sum_{0\leq i,j\leq n} a^{i+j}$, $S_6 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\0\leq j\leq p}} i\, a^j$, et $P = \prod_{1\leq i,j\leq n} ij.$

15.1.3 Et en Python ?

Pour faire une somme double du type $\sum_{\substack{a\leq i\leq b\\c\leq j\leq d}}$ on utilise 2 boucles `for` imbriquées :

Exercice 15.4. Écrire une fonction Python prenant en argument deux entiers n et m et renvoyant la valeur de :

1. $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\0\leq j\leq m}} \frac{i}{i+j}$
2. $\prod_{\substack{2\leq i\leq n+1\\0\leq j\leq m}} (i+2^j)$

15.2 Sommes doubles "triangulaires"

On se place dans le cas "carré" $n = p$. On range à nouveau les nombres $a_{i,j}$ dans un tableau (à n lignes et n colonnes). Le nombre $a_{i,j}$ est placé ligne i colonne j.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On souhaite calculer la somme des coefficients du tableau placés au-dessus ou en-dessous de la diagonale (diagonale incluse), c'est-à-dire les sommes :

— $\displaystyle\sum \quad a_{i,j}$ (termes au-dessus de la diagonale), ou

— $\displaystyle\sum \quad a_{i,j}$ (termes en-dessous de la diagonale).

Dans la suite, on s'intéresse à la deuxième somme, les résultats sont bien sûr similaires dans le cas de la première.

15.2.1 Sommations par lignes et par colonnes

Pour calculer $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$, on peut d'abord faire la somme sur chacune des lignes :

$$\begin{array}{lllllll} a_{1,1} & & & & & \longrightarrow & a_{1,1} = \sum \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & & & \longrightarrow & a_{i,1} + \ldots + a_{i,i} = \sum \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} & \longrightarrow & a_{n,1} + \ldots + a_{n,j} + \ldots + a_{n,n} = \sum \end{array}$$

Conclusion : en sommant ligne par ligne, on obtient

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{1} a_{1,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} = \sum_{i=} \left(\sum_{j=} a_{i,j} \right)$$

Pour calculer $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$, on peut aussi faire la somme sur chacune des colonnes :

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{j,j} & & \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\sum a_{i,1} & & \sum a_{i,j} & & \sum a_{i,n}
\end{array}$$

Conclusion : en sommant colonne par colonne, on obtient

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + \ldots + \sum_{i=j}^{n} a_{i,j} + \ldots + \sum_{i=n}^{n} a_{i,n} = \sum_{j=} \left(\sum_{i=} a_{i,j} \right).$$

Finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Exercice 15.5. Calculer $S = \displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} 1$.

Important : Attention, la somme à l'intérieur dépend de l'indice de la somme à l'extérieur. Contrairement aux sommes "rectangulaires" il ne suffit donc pas d'échanger les deux symboles sommes. En particulier, les égalités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} = \sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

sont fausses (et n'ont aucun sens !).

Généralisations : De manière plus générale, pour $m, n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{m\leq k\leq \ell\leq n} a_{k,\ell} = \sum_{k=} \quad \sum_{\ell=} \quad a_{k,\ell} = \sum_{\ell=} \quad \sum_{k=} \quad a_{k,\ell}$$

On peut aussi traiter des inégalités strictes (cas où la diagonale "$i = j$" est exclue) :

$$\sum_{1\leq j< i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=}^{n-1} \quad \sum_{i=} \quad a_{i,j} = \sum_{i=}^{n} \quad \sum_{j=} \quad a_{i,j}$$

On rappelle que par convention, toute somme vide est nulle : $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} b_i = \sum_{j=n+1}^{n} b_j = 0$, de sorte qu'on peut aussi écrire :

$$\sum_{1\leq j< i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=} \; a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=} \; a_{i,j}$$

à condition de se rappeler que les expressions $a_{n+1,n}$ et $a_{1,0}$ n'ont a priori pas de sens.

Exercice 15.6. Calculer $T = \sum_{1\leq j<i\leq n} 1$.

15.2.2 Méthodes

Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :

— Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{i} \tilde{a}_i =$

— Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=j}^{n} \tilde{a}_j =$

Cette utilisation est un peu plus subtile que dans le cas "rectangulaire" car l'indice dont dépend $a_{i,j}$ peut lui-même être une borne...

Important : Le choix de l'ordre de sommation devient donc ici une étape essentielle du calcul : choisir le bon ordre simplifie (voire rend possible) le calcul de la somme.

Exercice 15.7. Écrire les deux ordres de sommations possibles pour calculer les sommes suivantes, choisir le bon, et terminer le caclul : $S_1 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$, et $S_3 = \sum_{0\leq j\leq k\leq n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j\, b^{k-j}$.

Pour conclure, certaines sommes "rectangulaires" se prêtent particulièrement à un "découpage" en sommes "triangulaires". On écrit alors par exemple que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j}$$

Exercice 15.8. Calculer $S_4 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$ et $S_5 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$

Exercice 15.9. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_6 = \sum_{0\leq i<j\leq n} \frac{i^2}{j^2-j}$, $S_7 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i-j}$

15.2.3 Et en Python ?

Pour faire une somme double du type $\sum_{a\leq i\leq j\leq b}$ on utilise 2 boucles `for` imbriquées :

Exercice 15.10. Écrire une fonction Python prenant en argument deux entiers n et m et renvoyant la valeur de :

1. $\sum_{1\leq j\leq i\leq n} \frac{i}{i+j}$
2. $\prod_{m\leq j<i\leq n} ij$

Exercice 15.11. Calculer les sommes et produits suivants pour $n, p \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} 2^{i-j}$
3. $P_1 = \displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$
4. $P_2 = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} e^{i+j}$

Exercice 15.12. Calculer les sommes et produits suivants pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} i + j$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}\binom{n}{j}$
4. $S_4 = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n-i}$
5. $S_5 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$
6. $P_1 = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq j}} \left(\frac{k}{i}\right)^{1/j}$

Exercice 15.13. Pour $n \geq 1$ on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.
Montrer que pour tout $n \geq 1,\ u_n = (n+1)H_n - n$.