Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 8 – Mathématiques – Sujet B

Mercredi 15 Mai 2024

Durée de l'épreuve : 1 heures 15 minutes

Indiquez en tête de votre copie si vous traitez le sujet A ou B.
Le devoir est composé de quatre exercices et d'un exercice bonus.
L'exercice bonus est plus difficile et n'est à traiter que si le reste est terminé.

Exercice 1. On considère :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z + t = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \{(2a, -a, 0, a),\ a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner deux éléments distincts de F. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Donner deux éléments distincts de G. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Exercice 2. On considère les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v_1 = (1, 2, 4)$ et $v_2 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de v_1 et de v_2 dans la base B.
3. Déterminer le vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Factoriser complètement le polynôme P donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, on se propose de déterminer tous les polynômes P tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) = P(x) \tag{$\star$}$$

(autrement dit on cherche l'ensemble des polynômes réels P qui sont 1-périodiques sur $\mathbb{R}$).

1. Soit P un polynôme solution de $(\star)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P(n) = P(0).$$
   (b) On considère le polynôme Q défini par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) - P(0).$$
   Montrer que le polynôme Q possède une infinité de racines réelles. En conclure que $Q = 0$.
   (c) En déduire que P est un polynôme constant.
2. Réciproquement, montrer que tout polynôme constant est solution de $(\star)$. Conclure.

Exercice 5 (Bonus - Polynômes de Lagrange). Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le i-ème polynôme de Lagrange L_i par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

1. Dans le cas $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, écrire sous forme développée les polynômes L_0, L_1 et L_2.
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer le degré de L_i, ses racines et la valeur de $L_i(x_i)$.
3. Prouver que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
4. Soit P un polynôme réel. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x).$$