TD_2 Nombres réels, (in)équations.

1 Résolution d'équations

Exercice 1 (○○○)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2(3-x)=4+9(x-2)$,
2. $(3x-1)(2x+3)=(5-3x)^2$,
3. $(4x+1)^2=(5x-2)^2$,
4. $x^2-2\sqrt{2}x=-2$,
5. $9-(5-x)(3-2x)=4x^2$,
6. $3x^2+5x+13=5(x+2)$.

Exercice 2 (•○○)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $9-\dfrac{2x+7}{3}=\dfrac{4x}{6}-\dfrac{1}{3}$,
2. $\dfrac{3x+1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{3}x-1+2x$,
3. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}+x=0$,
4. $1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4(x^2-2)}{x(4x+8)}$,
5. $1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$,
6. $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1}=2-x+x^2$.

Exercice 3 (••○)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4-2x^2+1=0$,
2. $x^2-\dfrac{5}{x^2}+4=0$.

Exercice 4 (••○)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3|2-x|=5$,
2. $2|x+4|=4x-3$,
3. $|x-\sqrt{2}|=|4x-1|$,
4. $|x^2-4x+3|=x-3$,
5. $(|x|+x)(|x|-x)=1$.

Exercice 5 (•○○)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, en précisant où celle-ci a un sens et en veillant aux liens logiques à chaque étape :

$$x+\sqrt{2x+1}=1.$$

(On pourra commencer par isoler la racine carrée.)

Exercice 6 (••○)

1. Discuter, selon la valeur du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, l'existence de solutions réelles de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$
$$x^2-(\alpha+3)x+3\alpha+1=0.$$
2. Déterminer, en fonction de $\beta\in\mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$
$$x^2-2\beta x-\beta+6=0.$$

2 Résolution d'inéquations

Exercice 7 (•○○)
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en précisant à chaque fois l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

1. $3x+3 \leq -2x+4$,
2. $\dfrac{4x-3}{3x+7} > 0$,
3. $\dfrac{4x-3}{3x+7} > 1$.

Exercice 8 (• ◦ ◦)
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en précisant à chaque fois l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

1. $x^2 - 3x + 7 \geq -\dfrac{3}{2}$,
2. $x^2 - 18 \leq 3x$,
3. $-8 + 6x \leq x^2$,
4. $x^4 \leq 16$,
5. $\dfrac{3}{4-x} + \dfrac{1}{4+x} \leq \dfrac{5}{16-x^2}$,
6. $\sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}$,
7. $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+1} + 1$.

Exercice 9 (• • ◦)
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $|3x+1| \geq |x+2|$,
2. $|x-2| + |x^2+x-6| \leq 3|x-2|$.

3 Un melting-pot

Exercice 10 (• • ◦)
Soient a et b deux réels. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Exercice 11 (• • ◦)

1. Soient a et b deux nombres réels. Trouver la valeur de $x \in \mathbb{R}$ qui rend minimale la quantité $(x-a)^2 + (x-b)^2$.
2. Soient a, b et c trois nombres réels. Trouver la valeur de $x \in \mathbb{R}$ qui rend minimale la quantité $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$.
3. Soient n un entier naturel, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels. Trouver la valeur de $x \in \mathbb{R}$ qui rend minimale la quantité $(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$.

Exercice 12 (• • ◦)
Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ \frac{x^2+3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Discuter de l'existence et déterminer la valeur, s'ils existent, de $\max(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$, $\inf(A)$.

Exercice 13 (• • ◦)
Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 23x - 60.$$

On cherche l'ensemble des racines de P.

1. Montrer que 5 est une racine de P.
2. On admet (à ce stade de l'année) que l'on peut en conséquence factoriser l'expression définissant P par $x-5$. Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-5)(ax^2 + bx + c).$$

3. En déduire l'ensemble des racines de P.