TD$_3$ Raisonnement par récurrence.

1 Récurrence simple

Exercice 1 (• ◦ ◦)

1. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.
2. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Exercice 2 (• ◦ ◦)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

Exercice 3 (• • ◦)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2}.$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1.$$

Exercice 4 (• • ◦)
Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 5 (• • •)
Pour cet exercice, on rappelle les points suivants : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- *On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
- *On dit que (v_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*
- *On dit que (v_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*
- *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
- *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Déduire de ce qui précède que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. $(\star)$ Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 (• • ◦)
Dans cet exercice, on cherche à montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

1. En étudiant le trinôme du second degré $x^2 - 2x - 1$, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 \geq 2n + 1$.
2. Montrer par récurrence le résultat souhaité.
3. Pourquoi le résultat n'est-il valable que pour $n \geq 4$?

2 Récurrence double

Exercice 7 (•○○)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n.$$
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 8 (••○)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 8$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n).$$

Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(3n+1).$$

Exercice 9 (•••)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Cette suite célèbre est étudiée depuis fort longtemps, elle apparaît dans les écrits de savants indiens dès le 3ème siècle avant J.C., et doit son nom à Leonardo Fibonacci, un mathématicien italien qui vécut entre les 12ème et 13ème siècles. Il introduit cette suite pour décrire la croissance d'une population de lapins (dans un modèle simplifié) : « *Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.* » (Fibonacci, Liber abaci, 1202)

1. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet deux solutions réelles notées α et β, avec $\alpha > \beta$. Exprimer α et β.
2. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

3 Récurrence forte

Exercice 10 (•••)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrer, en utilisant une récurrence forte, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.
2. ($\star$) Trouver une autre démonstration du résultat précédent, sans utiliser de récurrence forte.