Chapitre 4

Trigonométrie

Sommaire

La trigonométrie, du grec « trigonos » (triangle) et « métrie » mesure, est la branche des mathématiques qui traite des relations entre les angles et les distances au sein d'un triangle.

Ce chapitre introduit le cercle trigonométrique ainsi que les fonctions trigonométriques, notamment les fonctions cosinus, sinus et tangente.

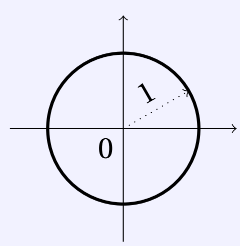
Avant d'être des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ces fonctions sont des objets géométriques ; c'est ainsi qu'ils avaient été introduits au collège. C'est la démarche que nous reprenons ici (dans un triangle rectangle d'hypoténuse 1).

Les aspects analytiques (monotonie, dérivabilité, ...) sont relégués à des chapitres ultérieurs.

4.1 Angles en radians

Définition 4.1: Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle du plan de rayon 1 et de centre l'origine O.



Propriété 4.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points*

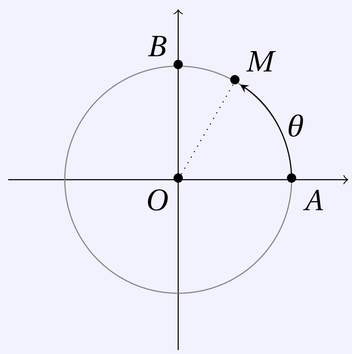
$$C(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Remarque 4.1. Ce cercle correspond aux points du plan qui sont situés à la distance 1 de l'origine :

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 1.$$

Définition 4.2: Angle orienté

On considère un repère orthonormé (O, A, B). Pour un point M sur le cercle trigonométrique, on définit l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ par la longueur algébrique de l'arc de cercle entre le point A et le point M. Le sens positif est tel que $\widehat{AOB} = +\frac{\pi}{2}$. L'angle est exprimé en radians.

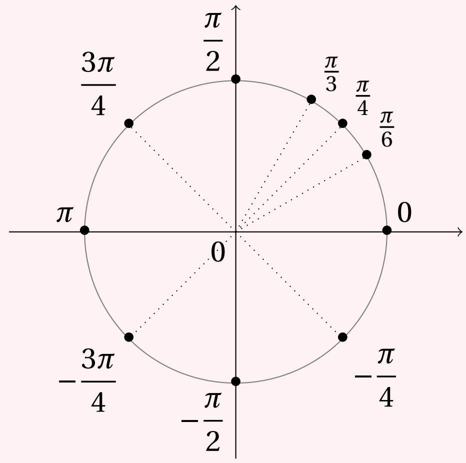


Remarque 4.2.
- L'angle d'un point ainsi défini n'est pas unique, il est exprimé à 2π près. Cela vient du fait que pour aller du point 0 au point M, je peux ajouter autant de tours complets dans un sens ou dans l'autre que je le souhaite.
- C'est une façon astucieuse de mesurer un angle : sur un disque de rayon 1, on enroule un fil et on mesure la longueur nécessaire pour faire l'angle (positive dans le bon sens, négative dans l'autre). C'est plus simple que l'approche en degrés, avec l'angle complet qui mesure 360 degrés sans que l'on sache vraiment pourquoi. Néanmoins, la difficulté de l'approche en radians vient de la longueur du fil nécessaire pour faire un tour exact, 2π, qui est un nombre irrationnel.

Définition 4.3 (Sens trigonométrique)**.** Le sens positif appelé aussi sens trigonométrique, est opposé au sens des aiguilles d'une montre.

Propriété 4.2 (Correspondance entre degrés et radians)**.** *Les unités degrés et radians sont proportionnelles. Pour passer d'une mesure en degré à une mesure en radians, on multiplie celle-ci par* $\dfrac{2\pi}{360}$.

Propriété 4.3: Quelques angles remarquables



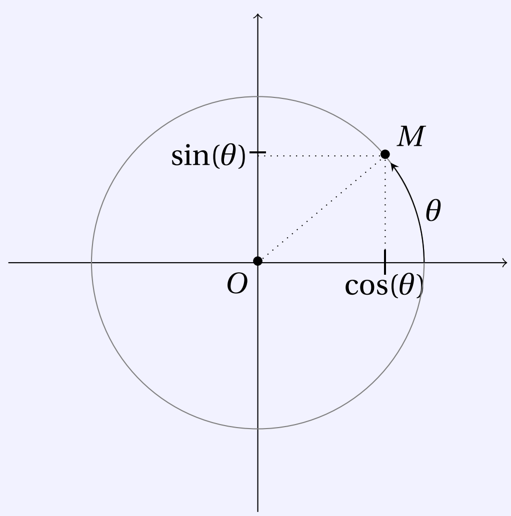
4.2 Fonctions trigonométriques

Nous présentons ici les bases de la trigonométrie. Ces notions seront complétées dans le chapitre sur les nombres complexes.

Définition 4.4: Cosinus et sinus

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

- Le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$ par l'abscisse du point du cercle trigonométrique d'angle θ.
- Le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$ par l'abscisse du point du cercle trigonométrique d'angle θ.



Remarque 4.3.

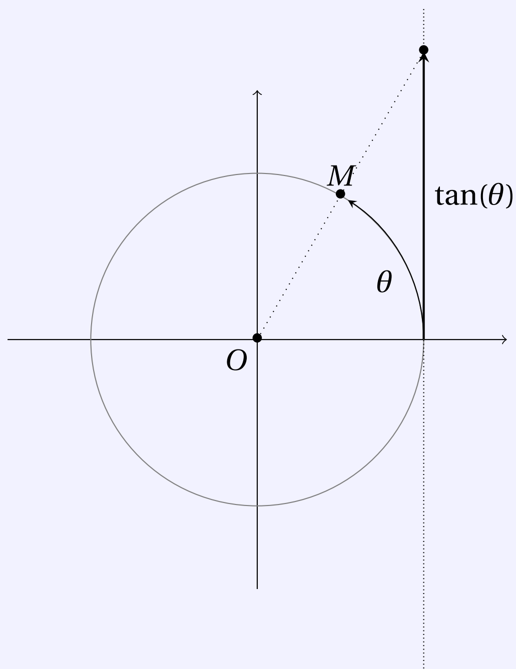
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note parfois indifféremment $\cos(\theta)$ ou $\cos\,\theta$, de même pour sin.
- Ces définitions sont cohérentes avec celles qui ont été vues au collège, et au lycée. En effet, on y apprend par exemple que
$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

On se contente d'apprendre cette formule lorsque la longueur de l'hypoténuse vaut 1, c'est-à-dire lorsque l'hypoténuse est le rayon du cercle trigonométrique. Le côté adjacent correspond alors à la longueur sur l'axe des abscisses; on a la même correspondance avec le sinus.

Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de Thalès.

Définition 4.5: Tangente

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on considère la droite d'angle θ par rapport à l'axe des abscisses, et on définit la tangente de θ par l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe vertical d'équation $x = 1$. On note $\tan\theta$ ou $\tan(\theta)$.



4.3 Propriétés élémentaires

Nous énoncons à présent quelques propriétés géométriques élémentaires que l'on retrouve très simplement en dessinant le cercle trigonométrique. En particulier les dernières ne sont pas forcément à connaître par coeur, mais à savoir retrouver rapidement avec un croquis.

Propriété 4.4: Cosinus : propriétés trigonométriques élémentaires

1. Le cosinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$:
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) \in [-1,1].$$
2. Le cosinus est une fonction 2π-périodique :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$$
et par conséquent
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(\theta+2k\pi) = \cos(\theta).$$
3. Le cosinus est pair :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$
4. Nous avons les symétries suivantes :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta).$$

Propriété 4.5: Sinus : propriétés trigonométriques élémentaires

1. Le sinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$:
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) \in [-1,1].$$
2. Le sinus est une fonction 2π-périodique :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta)$$
et par conséquent
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(\theta+2k\pi) = \sin(\theta).$$
3. Le sinus est impair :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$
4. Nous avons les symétries suivantes :
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta).$$

Propriété 4.6: Relations entre sinus et cosinus

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a les relations suivantes

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin(\theta)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos(\theta)$.

Remarque 4.4. Cercle trigo, courbes. Le décalage entre les deux courbes s'interprète au travers des relations précédentes, en analysant ce décalage de $\pi/2$.

Nous pouvons à présent énoncer plusieurs propriétés de la tangente.

Propriété 4.7: Tangente : propriétés géométriques élémentaires

1. La tangente est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note
$$\mathbb{R} \setminus D_{\tan} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
le domaine de définition de la tangente.
2. La tangente est une fonction π-périodique :
$$\forall\, \theta \in D_{\tan}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$
et par conséquent
$$\forall\, \theta \in D_{\tan}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \tan(\theta + n\pi) = \tan(\theta).$$
3. La tangente est impaire :
$$\forall\, \theta \in D_{\tan}, \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta).$$
4. Nous avons les symétries suivantes :
$$\forall\, \theta \in D_{\tan}, \quad \tan(\pi - \theta) = \tan(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\pi + \theta) = \tan(\theta).$$
5. $$\forall\, \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}.$$

Nous pouvons à présent énoncer plusieurs relations fondamentales sur les fonctions sinus et cosinus.

Théorème 4.1: Relation de Pythagore

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Remarque 4.5. Cette formule est particulièrement utile lorsqu'utilisée sous la forme
$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$
Le signe devant la racine dépend de θ. On peut s'aider du cercle trigonométrique pour le retrouver. Par exemple
$$\forall\, \theta \in [0, \pi], \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
et
$$\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}.$$

Propriété 4.8 (Formules d'addition)**.** *Pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*, on a*
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a.$$

Remarque 4.6. On peut prouver cette formule facilement à l'aide de l'exponentielle complexe, en utilisant la formule
$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}.$$

Mais dans ce cours nous prouverons justement cette formule à l'aide de la formule de duplication.

Propriété 4.9: Formule de duplication

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Propriété 4.10 (Formules de soustraction). *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Théorème 4.2: Valeurs remarquables

Voici quelques mesures à connaître pour les angles remarquables du premier cadran.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque 4.7.
— Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir ces valeurs, en observant qu'elles sont toutes de la forme $\frac{\sqrt{n}}{2}$ avec n qui peut valoir $0, 1, 2, 3$ ou 4.
— A partir de ces valeurs et des relations de symétrie du cosinus et du sinus sur le cercle, on peut trouver les mesures des cosinus et du sinus pour tous les angles remarquables sur le cercle.

Propriété 4.11 (Valeurs remarquables de la tangente). *On a*

- $\tan 0 = 0$,
- $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
- $\tan\frac{\pi}{4} = 1$,
- $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Remarque 4.8. Au moyen de ces valeurs remarquables et des diverses formules trigonométriques, nous sommes en mesure de calculer d'autre valeurs du cosinus, du sinus et de la tangente sur le cercle. Par exemple, comme
$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3},$$
on a
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.4 Équations trigonométriques

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution d'équations trigonométriques.

Théorème 4.3

- *Pour tout* $c \in [-1,1]$*, l'équation* $\cos x = c$ *admet une unique solution dans l'intervalle* $[0,\pi]$*, notée* $x = \arccos(c)$.
- *Pour tout* $c \notin [-1,1]$*, l'équation* $\cos x = c$ *n'admet aucune solution.*
- *Pour tout* $c \in [-1,1]$*, l'équation* $\sin x = c$ *admet une unique solution dans l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, notée* $x = \arcsin(c)$.
- *Pour tout* $c \notin [-1,1]$*, l'équation* $\sin x = c$ *n'admet aucune solution.*
- *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, l'équation* $\tan x = t$ *admet une unique solution dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, notée* $x = \arctan t$.

Remarque 4.9. — Les fonctions arccos, arcsin, arctan sont appelées les fonctions trigonométriques réciproques.

— Sur certaines calculatrices, on peut utiliser la fonction arccos à l'aide de la touche $\cos^{-1}$, de même pour arcsin, arctan.

ILLUSTRATION GRAPHIQUE

Propriété 4.12. *On dispose des propriétés suivantes :*

1. $\forall\, x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$,
2. $\forall\, x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$,
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$,
4. $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$,
5. $\forall\, x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$,
6. $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$,

Remarque 4.10. En général, pour $x \in \mathbb{R}$, on a pas $\arccos(\cos(x)) = x$ ni $\arcsin(\sin(x)) = x$. Par exemple $\arccos(\cos(4\pi)) = \arccos(0) = 1 \neq 4\pi$ et $\arcsin(\sin(3\pi/2)) = \arcsin(-1) = -\pi/2$.

Théorème 4.4: Caractérisation de l'égalité des cosinus, sinus et tangentes.

Soient θ et φ deux nombres réels. Nous avons les équivalences suivantes :

- $\cos\theta = \cos\varphi \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \varphi + 2k\pi \quad$ ou $\quad \theta = -\varphi + 2k\pi$.
- $\sin\theta = \sin\varphi \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \varphi + 2k\pi \quad$ ou $\quad \theta = \pi - \varphi + 2k\pi$.

Enfin, si $\theta, \varphi \in D_{\tan}$, alors $\tan\theta = \tan\varphi \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \varphi + 2k\pi \quad$ ou $\quad \theta = \pi + \varphi + 2k\pi$.

Exemple 4.1. Résolvons l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$. On sait que $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

d'après le théorème précédent.

Théorème 4.5: Résolution d'équations trigonométriques.

Soit $c, s \in [-1,1]$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

- L'ensemble des solutions de l'équation (d'inconnue θ) $\cos\theta = c$ est
$$\{\arccos(c) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{-\arccos(c) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
- L'ensemble des solutions de l'équation (d'inconnue θ) $\sin\theta = s$ est
$$\{\arcsin(s) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{\pi - \arcsin(s) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
- L'ensemble des solutions de l'équation (d'inconnue θ) $\tan\theta = t$ est
$$\{\arctan(t) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 4.2. Résoudre $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Théorème 4.6
Pour $(c,s) \in \mathbb{R}^2$, on définit le système
$$(S): \quad \begin{cases} \cos x = c, \\ \sin x = s. \end{cases}$$

- *Si $c^2 + s^2 \neq 1$ alors (S) n'a pas de solutions.*
- *Si $c^2 + s^2 = 1$ alors (S) a une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est*
$$\{x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Méthode 4.1: Méthode de la phase

En physique, on obtient souvent des expressions du type $G = A\cos\theta + B\sin\theta$, que l'on souhaite exprimer sous la forme $r\cos(\theta - \varphi)$. Pour cela,

- On cherche l'amplitude du signal $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- On factorise par r : $G = r(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)$.
- Or $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donc d'après le théorème précédent, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \cos(\varphi)$ et $\beta = \sin(\varphi)$. Donc
$$G = r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta - \varphi).$$

Exercice 4.1. Écrire $G = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ sous la forme d'un cosinus.

Exercice 4.2. Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 4.3. Écrire $G = 3\cos\theta + 4\sin\theta$ sous la forme d'un cosinus.