Corrigé du DS1 – Mathématiques

Mercredi 18 Septembre 2024

Durée : 2 heures

Exercice 1. 1. Mettre les nombres suivants sous forme de fraction irréductible :

- $A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$,
- $B = \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} - \frac{1}{2}$,
- $C = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42}$,
- $D = \frac{10}{\frac{15}{6}}$.

2. Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

- $E = \frac{1}{2 \times 10^{-2}}$,
- $F = \frac{0.03^2}{0.1^5}$.

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- $G = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48}$,
- $H = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$,
- $I = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$.

Corrigé.

- $A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21} = \frac{2}{3} - \frac{8}{9} = \frac{6}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{2}{9}$.
- $B = \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
- $C = \frac{63}{40} \times \frac{8}{15} \times \frac{25}{42} = \frac{7 \times 3 \times 3}{4 \times 5 \times 2} \times \frac{4 \times 2}{3 \times 5} \times \frac{5 \times 5}{3 \times 2 \times 7} = \frac{1}{2}$ après simplification.
- $D = \frac{10}{\frac{15}{6}} = \frac{10 \times 6}{15} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 2}{3 \times 5} = 4$.
- $E = \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = \frac{1}{2} \times 10^2 = 50$.
- $F = \frac{0.03^2}{0.1^5} = \frac{(3 \times 10^{-2})^2}{(10^{-1})^5} = 9 \times 10^{-4} \times 10^5 = 90$.
- $G = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \times 4\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.
- $H = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{\frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3}} = 3\sqrt{\frac{4}{9}} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$.
- $I = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $3x^2 + 3x - \frac{9}{4} = 0$,
2. $-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0$,
3. $|4x + 1| = |2x + 2|$.

Corrigé.

1. Notons P le trinôme du second degré défini par $P(x) = 3x^2 + 3x - \frac{9}{4}$.
Le discriminant de P vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times \left(-\frac{9}{4}\right) = 9 + 3 \times 9 = 36 = 6^2$. Donc P possède deux racines réelles distinctes : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
$\boxed{\text{L'équation } 3x^2 + 3x - \frac{9}{4} = 0 \text{ possède deux solutions : } -\frac{3}{2} \text{ et } \frac{1}{2}.}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0 \iff -2(x^2)^2 + 10x^2 - 8 = 0 \iff -2y^2 + 10y - 8 = 0 \quad \text{avec } y = x^2 \iff y \text{ est racine de } Q$$
où Q est le trinôme du second degré défini par $Q(z) = -2z^2 + 10z - 8$. Le discriminant de Q vaut $\Delta = 100 - 64 = 36$. Ainsi Q possède deux racines réelles distinctes : 1 et 4. Ainsi en reprenant la chaîne d'équivalences ci-dessus, on obtient
$$-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0 \iff x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4 \iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$
$\boxed{\text{L'équation } -2x^4 + 10x^2 - 8 = 0 \text{ possède quatre solutions : } 1, 1, 2 \text{ et } -2.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |4x+1| = |2x+2| &\Longleftrightarrow 4x+1 = 2x+2 \quad \text{ou} \quad 4x+1 = -(2x+2) \\ &\Longleftrightarrow 2x = 1 \quad \text{ou} \quad 6x = -3 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'équation } |4x+1[= |2x+2| \text{ possède deux solutions : } -\tfrac{1}{2} \text{ et } \tfrac{1}{2}.}$

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $-x^2 + 10x - 16 > 0$,
2. $\dfrac{2x-3}{x-1} < 1$,
3. $(2x+1)(x+3)(2-x) > 0$,
4. $(1-2x)^2 > 16$.

Corrigé. 1. Le trinôme $-x^2+10x-16$ a un coefficient dominant strictement négatif est possède 2 et 8 comme racines (soit en calculant le discriminant, soit en le voyant directement). Ainsi on sait que

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } -x^2+10x-16 > 0 \text{ est }]2,8[.}$

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} < 2 &\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow x-2 \text{ et } x-1 \text{ sont de signes strictement opposés} \\ &\Leftrightarrow x \in]1,2[. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $]1,2[$.

3. On cherche à résoudre l'inéquation $(2x+1)(x+3)(2-x) > 0$. Dressons le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$			$-$		0		$+$		
$x+3$		$-$	0			$+$			
$(2x+1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$2-x$				$+$			0	$-$	
$(2x+1)(x+3)(2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation } (2x+1)(x+3)(2-x) > 0 \text{ est }]-\infty,-3[\cup]-1/2,2[.}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} (1-2x)^2 > 16 &\Longleftrightarrow 1-2x > 4 \quad \text{ou} \quad 1-2x < -4 \\ &\Longleftrightarrow 1-4 > 2x \quad \text{ou} \quad 1+4 < 2x \\ &\Longleftrightarrow -\frac{3}{2} > x \quad \text{ou} \quad \frac{5}{2} < x. \end{aligned}$$

On en conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation } (1-2x)^2 > 16 \text{ est }]-\infty,-3/2[\cup]5/2,+\infty[.}$

Exercice 4. 1. (a) Discuter en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$ le nombre de racines du polynôme P_m défini par

$$P_m(x) = (m+2)x^2 + 2(2m+1)x + m + 2.$$

(b) Lorsque m est tel que P_m possède deux racines réelles, donner la valeur de la somme et du produit de ces 2 racines (sans chercher à les calculer explicitement).

2. Discuter en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$ le nombre de racines du polynôme Q_m défini par

$$Q_m(x) = m^2x^2 + (m^2 - 3m)x + 2 - 2m.$$

Corrigé. 1. (a) Si $m = -2$, alors $m+2 = 0$ et P_m est un polynôme de degré 1, qui s'annule donc exactement une fois sur $\mathbb{R}$, en 0.

Si $m \neq -2$, alors le discriminant de P_m est

$$\begin{aligned}\Delta_m &= (2(2m+1))^2 - 4(m+2)^2 \\ &= (2(2m+1))^2 - (2(m+2))^2 \\ &= (4m+2-(2m+4))(4m+2+2m+4) \\ &= (2m-2)(6m+6) \\ &= 12(m-1)(m+1).\end{aligned}$$

en vertu de la troisième identité remarquable.

Ainsi Δ_m est un trinôme du second degré de la variable m, dont les racines (évidentes, car Δ_m nous est présenté sous forme factorisée!) sont 1 et -1 et le coefficient dominant est 12.

En vertu de nos connaissances sur le signe d'un trinôme du second degré, on conclut que

- Si $m \in (]-\infty,-1[\setminus\{-2\}) \cup]1,+\infty[$ alors $\Delta_m > 0$ et P_m possède deux racines réelles distinctes.
- Si $m = -1$ ou $m = 1$ ou $m = -2$ alors $\Delta_m = 0$ et P_m possède une seule racine réelle.
- Si $m \in]-1,1[$ alors $\Delta_m < 0$ et P_m ne possède aucune racine réelle.

(b) Si $m \in (]-\infty,-1[\setminus\{-2\}) \cup]1,+\infty[$, P_m possède deux racines réelles distinctes et en vertu des relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme du second degré,

$\boxed{\text{la somme des racines de } P_m \text{ vaut } -\frac{2(2m+1)}{m+2} \text{ tandis que le produit des racines vaut } \frac{m+2}{m+2} = 1}$.

2. Notons que si $m = 0$ alors Q_m est le polynôme constant égal à 2.

Supposons maintenant $m \neq 0$. Q_m est un trinôme du second degré, dont le discriminant vaut

$$\begin{aligned}\Delta_m &= (m^2-3m)^2 - 4 \times m^2 \times (2-2m) \\ &= m^4 - 6m^3 + 9m^2 - 8m^2 + 8m^3 \\ &= m^4 + 2m^3 + m^2 \\ &= m^2(m^2+2m+1) \\ &= m^2(m+1)^2.\end{aligned}$$

On en conclut que

- Si $m = 0$ alors P_m est le polynôme constant égal à 2 et ne possède aucune racine réelle.
- Si $m = -1$ alors $\Delta_m = 0$ et P_m possède une seule racine réelle (vérifier que cette racine est -2).
- Dans tous les autres cas, $\Delta_m > 0$ et P_m possède deux racines réelles distinctes.

Exercice 5. 1. Démontrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

2. En déduire les solutions réelles de l'équation

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Corrigé. 1. On a $(\sqrt{2}-1)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-\sqrt{2}$. Comme de plus $\sqrt{2}-1>0$, on en conclut que $\boxed{\sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.}$

2. Le trinôme du second degré $\frac{1}{4}x^2+2x+2\sqrt{2}+1$ a pour discriminant $\Delta = 2^2-4\times\frac{1}{4}\times(\sqrt{2}+1) = 3-\sqrt{2}>0$. Ce trinôme possède donc deux racines réelles distinctes données par

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{-2-(\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = -2(1+\sqrt{2})$$

et

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{-2+(\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 2(-3+\sqrt{2})$$

En conclusion, $\boxed{\text{l'équation } \frac{1}{4}x^2+2x+2\sqrt{2}+1=0 \text{ possède deux solutions réelles : } -2(1+\sqrt{2}) \text{ et } 2(-3+\sqrt{2}).}$

Exercice 6 (Exercice bonus, si le reste est fini)**.** 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n+n+1.$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}+\frac{1}{n+1}.$$

Montrer que pour tout $n\geq 2$, $u_n>1$.

Corrigé. 1. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

est vraie.
Initialisation : On a $u_0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et montrons $\mathscr{P}(n+1)$ c'est-à-dire que

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a d'après l'énoncé $u_{n+1} = u_n+n+1$. Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque. u_n est la somme des entiers naturels de 0 à n, connue sous le nom de *somme de Gauss.* Nous étudierons cette somme dans un prochain chapitre.

2. Calculons u_2 afin de pouvoir initialiser un raisonnement par récurrence.
On a $u_1 = \sqrt{u_0}+1 = 1$ puis $u_2 = \sqrt{u_1}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n\geq 2$, la propriété

$$\mathscr{Q}(n): \quad u_n>1$$

est vraie.
Initialisation : On a $u_2 = \frac{3}{2} > 1$ donc $\mathscr{Q}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$u_n > 1$$

et montrons $\mathscr{Q}(n+1)$ c'est-à-dire que

$$u_{n+1} > 1.$$

On a d'après l'énoncé $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_n > 1.$$

Par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$, il vient que

$$\sqrt{u_n} > 1.$$

On en déduit que

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1} > 1.$$

Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 2$, $u_n > 1$.