# TD$_5$ Suites usuelles

## 1 Suites arithmétiques, suites géométriques

**Exercice 1 (○○○)**
Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. la suite arithmétique de raison $-2$ et de premier terme $u_0 = 3$,
2. la suite géométrique de raison $-2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

**Exercice 2 (•○○)**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   Ceci assure que la suite $(u_n)$ est correctement définie et que l'on peut définir la suite $(v_n)$ par :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n}.$$
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3 (•○○)**
On place 1000 euros sur un compte rémunéré au taux de 2%. Quel est le capital présent sur le compte après 10 ans ?

## 2 Les suites arithmético-géométriques

**Exercice 4 (•○○)**
Déterminer l'expression du terme général de la suite donnée par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

et $u_0 = 3$.

**Exercice 5 (•○○)**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_1 = 3$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

1. Déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
2. Déterminer la limite de $(u_n)$ quand $n \to \infty$.

**Exercice 6 (•○○)**
Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n + 2.$$

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

2. Montrer que $(u_n)$ converge et préciser sa limite.

**Exercice 7 (•∘∘)**
On considère une suite $(u_n)$ vérifiant $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$4u_{n+1} + u_n = 2.$$

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 8 (••∘)**
Dans une réserve naturelle, on surveille le nombre d'individus d'une espèce animale. Une population initiale de 1000 individus évolue ainsi : chaque année, 20% des individus disparaissent, et 120 individus sont introduits.

1. Décrire l'évolution de la population au bout de $n$ années, en fonction de $n$ (on note $p_n$ la population au bout de $n$ années).
2. Déterminer la valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ au delà de laquelle la population $p_n$ est inférieure à 800.

**Exercice 9 (••∘)**
Un problème posé par Léonard Fibonacci est le suivant : un marchand part de Pise pour Lucques où il réussit à doubler son capital ; il paie ensuite ses frais de voyage 12 deniers. Puis il va à Florence où il réussit à doubler son capital. Il paie ses frais de voyage 12 deniers et il revient à Pise où il recommence une troisième fois l'opération : doublement de son capital, paiement des frais. Il constate alors que sa bourse est vide. Quel était son avoir initial ?

## 3 Les suites récurrentes doubles, et au-delà

**Exercice 10 (•∘∘)**
Exprimer $u_n$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$
2. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0,$$
3. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,$$
4. la suite vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$
Reconnaissez-vous cette suite ?

**Exercice 11 (••∘)**
Soit $(u_n)$ la suite donnée par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}.$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et en déduire que la suite $(u_n)$ est correctement définie.
2. Que dire de la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = \ln u_n$ ?
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 12 (• • ∘)**
Soit $(u_n)$ la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et en déduire que la suite $(u_n)$ est correctement définie.
2. Que dire de la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = \ln u_n$ ?
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 13 (• • ∘)**
Soit $(u_n)$ la suite donnée par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4.$$

1. Déterminer une suite $(l)$ constante satisfaisant la relation de récurrence ci-dessus.
2. Que dire de la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = u_n - l$ ?
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.