TD$_6$ Sommes et produits

1 Calcul de sommes

Exercice 1 (∘∘∘)
Exprimer les quantités suivantes à l'aide du signe Σ et les calculer à l'aide du cours :

1. $1+2+\cdots+50$,
2. $1+2+4+\cdots+256$,
3. $1+4+9+16+\cdots+n^2$,
4. $1+8+27+64+\cdots+8000$,
5. $3+4+\cdots+109+110$,
6. $3+9+27+\cdots+3^{10}$,
7. $9+16+\cdots+19^2+20^2$,
8. $4+8+12+\cdots+400$,
9. $1+4+7+10+13+\cdots+(3n+1)$.

Exercice 2 (•∘∘)
Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $a\in\mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n-1} k$,
2. $\sum_{k=1}^{n} 3^k$,
3. $\sum_{k=n}^{2n} a$,
4. $\sum_{k=0}^{n} 3(a^k+1)$,
5. $\sum_{k=0}^{n} 3\times 2^{k+1}$,
6. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$,
7. $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$,
8. $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 3 (•∘∘)
Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $a\in\mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{10} 5$,
2. $\sum_{k=-2}^{7} (-1)$,
3. $\sum_{k=0}^{n} e^{2k}$,
4. $\sum_{k=0}^{n} a^{2k+1}$,
5. $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$,
6. $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$,
7. $\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$,

Exercice 4 (••∘ Sommation par paquets)
Calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$,
2. $\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$.

Exercice 5 (••∘ Changement d'indices)
En utilisant le changement d'indice indiqué, calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} k2^k$, avec $j=k-1$,
2. $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$, avec $j=k-2$.

Exercice 6 (••∘)
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, et la quantité

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Remarquez que S_n est la somme des n premiers nombres impairs.

1. Calculer explicitement S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Calculer S_n en utilisant la linéarité de la somme.
3. Modifiez et adaptez le schéma suivant pour réaliser une « preuve sans mots » du résultat précédent.
4. Proposez deux autres démonstrations du résultat :

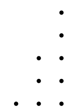

FIGURE 1 – Vers une preuve sans mots ?

(a) En considérant
$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2k$$
puis en calculant $P_n + S_n$ astucieusement.

(b) En effectuant une preuve par récurrence.

Exercice 7 (• • ∘)

1. Calculer $\sum_{k=1}^{50} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)! - k! = k \times k!$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Exercice 9 (• • ∘)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.
2. En déduire
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

2 Calcul de produits

Exercice 10 (• ∘ ∘)

Calculer les produits suivants

1. $\prod_{k=1}^{10} k^2$,
2. $\prod_{k=1}^{10} 3k$,
3. $\prod_{k=1}^{n} 2\sqrt{k}k$
4. $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$,
5. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$,
6. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$,
7. $\prod_{k=1}^{n} a^k$.

Exercice 11 (• ∘ ∘)

Simplifier en utiliser la notation factorielle

1. $6 \times 5 \times 4 \times 3$,
2. $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4}$,
3. $n(n-1)(2n+2)$,

3 Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Exercice 12 (∘ ∘ ∘)

Calculer les expressions suivantes :

1. $\binom{10}{9}$,
2. $\binom{8}{2}$,
3. $\binom{21}{21}$,
4. $\binom{50}{48}$.

Exercice 13 (• ◦ ◦)
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, développer à l'aide du triangle de Pascal

1. $(2+x)^3$,
2. $(x-3)^4$,
3. $(x-y)^3$,
4. $(1+x)^5$,
5. $(1-x)^6$,
6. $(x-y)^4$.

Exercice 14 (• ◦ ◦)
Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k$,
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}$,
3. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}$,
4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$,
5. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$,
6. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$.

Exercice 15 (• • •)
Soit $p \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

pour $n \geq p$.

1. Calculer S_p puis S_{p+1}.
2. Rappeler la formule de Pascal.
3. Montrer par récurrence sur n que
$$\forall\, n \geq p, \quad S_n = \binom{n+1}{p+1}.$$
4. Illustrer cette formule dans le triangle de Pascal.