DS2 – Mathématiques

Mercredi 9 Octobre 2024

Durée : 3 heures

- **Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite. Les téléphones portables sont éteints et rangés.**
- **Rédigez l'exercice d'informatique sur une copie séparée.**
- Le devoir comporte un exercice d'informatique, cinq exercices de mathématiques (exercice 2 à 6) et un exercice bonus en fin de sujet (à ne chercher que si le reste est terminé).
- La qualité de la présentation et de la rédaction, la lisibilité et la précision seront prises en compte pour une part importante de la note finale.
- *Encadrez* ou *soulignez* les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON)**.**

1. (a) Écrire une fonction `fun` qui prend en argument un nombre réel `x` et qui retourne la valeur de

$$\frac{x^3-3x^2+4}{2(x^2+1)}.$$

   (b) Que retourne l'instruction `fun(4)` ? On écrira le résultat sous forme simplifiée.

2. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous :

```python
def mystere(n):
    if n % 2 == 0:
        y = n / 2
    else:
        y = (n + 1)/2
    return y
```

   (a) Que retourne `mystere(10)` ? et `mystere(15)` ?

   (b) De manière générale, que retourne l'instruction `mystere(n)` ?

3. Écrire une fonction `min(x,y)` qui prend en argument deux nombres x et y et qui renvoie le minimum de x et de y c'est-à-dire
   - x si $x \leq y$,
   - y si $y \leq x$.

Exercice 2.

1. Donner la définition de la phrase : "$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique".
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3-2u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite lorsque $n \to \infty$?

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 4n + 6\right).$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer (par récurrence) que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 4.

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis donner les solutions qui sont dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

   (b) $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis donner les solutions qui sont dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquer la méthode de la phase à la quantité

$$S(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x).$$

   (b) Résoudre l'équation $S(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On introduit la suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$

   La question précédente montre que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 > 0$ (ceci n'est pas à démontrer).

   (a) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2/5$.

   (b) En déduire l'expression de t_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de t_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 6. Dans cet exercice, on cherche à calculer les nombres $x = \cos(5\pi/8)$ et $y = \sin(5\pi/8)$.

1. Placer le point d'angle $5\pi/8$ sur le cercle trigonométrique. Que peut-on en déduire concernant le signe de x et de y?
2. Rappeler la formule de duplication du cosinus, exprimant $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
3. En appliquant la formule de duplication du cosinus à un angle θ convenablement choisi, montrer que x et y vérifient

$$x^2 - y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Calculer $x^2 + y^2$.
5. En déduire la valeur de x^2 et de y^2 puis conclure quand à la valeur de x et de y.
6. Que vaut $\tan(5\pi/8)$?

Exercice 7 (Bonus - à chercher uniquement quand le reste est fini!)**.** On définit la suite de fonctions polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n désigne une fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Dans cette question, on souhaite démontrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ définie par

$$P(n): \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x))$$

   est vraie.

   (a) Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

   (b) Montrer que pour tout a et $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

   (c) Rédiger le raisonnement par récurrence double (*pour prouver l'hérédité, on pourra utiliser la question précédente pour des valeurs adéquates de a et b*).
3. Déduire de ce qui précède une expression de $\cos(3x)$ et de $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
4. Conjecturer le coefficient dominant de T_n et le degré de T_n. Le démontrer par récurrence.