DM2 – Mathématiques

A rendre le vendredi 18 octobre 2024

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}.$$

Montrer que pour tout $n \in N$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4.$$

1. Déterminer une suite constante (w_n) satisfaisant la relation de récurrence ci-dessus, c'est-à-dire qu'on cherche un nombre $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = l$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} + 3w_n + 4.$$

2. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_n - l$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n.$$
   (c) En déduire l'expression de v_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.