TD$_7$ Fonctions usuelles

1 Ensembles de définitions

Exercice 1 (• ∘ ∘)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer les ensembles de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 (• ∘ ∘)
On définit deux fonctions f et g par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner les ensembles de définition de f et g.
2. Déterminer les domaines de définition et expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Calculer l'image de $3x$ par f et l'image de x^3 par g.

Exercice 3 (• ∘ ∘)
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x+12}$
2. $z(x) = \sqrt{2x+4} - \dfrac{1}{x-3}$
3. $g(x) = \sin\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
4. $h(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{(\tan^2 x) + 1}$
5. $u(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$
6. $v(x) = \cos\left(x\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right)$
7. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
8. $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
9. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$
10. $u(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$
11. $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$
12. $g(x) = \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

2 Réduction d'intervalle d'étude

Exercice 4 (• ∘ ∘)
Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner leurs domaines de définition et les éventuelles symétries ou périodicité vérifiées par chacune d'entre elles.

1. $f(x) = \tan^2(x) + \cos(2x)$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
4. $u(x) = \dfrac{\tan x}{x^3 + x}$

Exercice 5 (• • ∘)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Montrer que f est 1-périodique. Tracer la courbe de f.

3 Calcul de dérivées

Exercice 6 (• • ∘)
Calculer (en justifiant l'ensemble de dérivation) la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x+1)^2$
2. $g(x) = \cos(x^2+1)$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. $f(x) = x^x$
5. $g(x) = (x+1)^{\cos x}$
6. $h(x) = (1+x+x^2)^{x+x^2}$

4 Tracé de graphes

Exercice 7 (• • ○)
A partir des courbes des fonctions de référence et en utilisant les transformations vues en cours, tracer le graphe des fonctions suivantes (sans calculette dans un premier temps) :

1. $x \mapsto \ln(-x)$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x+3} - 2$
3. $x \mapsto -\ln(x+1)$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}+1$
5. $x \mapsto 2\sqrt{5-x}$
6. $x \mapsto e^{|x|}$

5 Etude de fonctions

Exercice 8 (• • ○)
Étudier les fonctions suivantes et tracer l'allure de leur courbe représentative :

1. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$,
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2-9}{x+5}$,
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$,
4. $\mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
5. $\mathrm{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,
6. $\mathrm{th} : x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,
7. $k : x \mapsto \ln(-2x^2+x+1)$,
8. $u : x \mapsto e^x(x^2-1)$,
9. $v : x \mapsto e^{x^3-3x+1}$,
10. $w : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Vous pouvez vérifier vos résultats à la calculatrice, de Python ou de Geogebra.

Remarque 1 *Les fonctions ch, sh et th s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique.*

Exercice 9 (• • ○ Tiré du concours blanc 2023)

1. Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donner le signe de $x^m - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (on pourra distinguer les cas selon le signe de m).
2. Soit p et $q \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $x^p - x^q$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (on pourra distinguer les cas selon le signe de $p-q$).
3. A partir des questions précédentes :
   (a) tracer sur un même graphique les courbes des fonctions $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1/x^2$, $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$,
   (b) tracer sur un même graphique les courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Lorsque $a \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, on définit la fonction f_a sur $]0,+\infty[$ par

$$f_a(x) = x^a - ax + 1.$$

4. On fixe $a \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Calculer la dérivée de f_a, dresser le tableau de signes de f_a' (en distinguant selon que $a < 1$ ou $a > 1$).

5. (a) On suppose que $0 < a < 1$. Déterminer le tableau de variations complet de f_a et le maximum de f_a sur $]0, +\infty[$.
   (b) On suppose que $1 < a$. Déterminer le tableau de variations complet de f_a et le minimum de f_a sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10 (• • ◦)
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$.

1. Montrer que φ est paire et π périodique. Sur quelle intervalle I peut-on se contenter d'étudier φ?
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$.
3. En déduire le signe de φ' sur I puis le tableau de variations de φ sur I.
4. Tracer la courbe représentative de φ.

Exercice 11 (• • ◦)
Montrer par étude de fonctions que

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$ (et illustrer graphiquement).
2. $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (on pourra aussi exploiter astucieusement une identité remarquable).
3. $\forall x \geq 0,\ \sqrt{1+x} \geq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.
4. $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
6. $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.