DM3 – Mathématiques

A rendre le mardi 12 novembre

Problème. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Recopier et compléter la fonction Python `suite_u` d'argument n ci-dessous afin qu'elle renvoie le n-ème terme de la suite (u_n) :

```python
def suite_u(n):
    u = . . .
    for k in range (1, ...):
        u = . . .
    return u
```

   Vérifier pour les valeurs $n = 1$ ou $n = 2$ que votre fonction retourne un résultat correct.

   (b) Évaluer le nombre d'opérations (additions et multiplications) effectuées par la fonction `suite_u` en fonction de n. On notera $c(n)$ ce nombre.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3n$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   (a) Écrire une fonction `suite_S` qui prend en argument n et qui renvoie la valeur de S_n, et qui utilise la fonction `suite_u`. Vérifiez que l'instruction `suite_S`(2) renvoie la valeur 13.

   (b) Évaluer le nombre d'opérations effectuées par `suite_S` en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que l'appel à `suite_u`(k) compte pour $c(k)$ opérations).

   (c) Écrire une fonction `suite_S_bis` qui prend en argument n et qui renvoie la valeur de S_n, et qui effectue significativement moins d'opérations.
6. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3n + 1$.

   (a) En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```python
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        L.append(suite_u(i)-3*i+1)
    return L
```

   L'instruction `suite_v(n)` renvoie la liste des $n + 1$ premiers termes de la suite (v_n), c'est-à-dire la liste composée des éléments

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

   Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant

```python
>>> suite_v(5)
[1, 2, 4, 8, 16, 32]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
   Démontrer cette conjecture.

(b) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n.

(c) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de S_n en fonction de n.