TD$_8$ Nombres complexes

1 Forme algébrique

Exercice 1 (∘∘∘)
Placer dans le plan complexe les A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -1, \quad z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quelle relation existe entre z_B et z_C ?

Exercice 2 (•∘∘)
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $2(1+i) + i(2i-1)$,
2. $\sqrt{2}(1-i) + 2\sqrt{2}i(1+i)$,
3. $i(4-i)$,
4. $(1+i)(3+2i)$,
5. $(2\sqrt{2} + i\sqrt{3})(3i\sqrt{3} - \sqrt{2})$,
6. $\dfrac{2}{1-i}$,
7. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$,
8. $\overline{(4-i)(1+i)}$,
9. $\overline{\dfrac{2}{1+3i}}$,
10. $(1-i\sqrt{2})^2$
11. $(1+i)^3$

Exercice 3 (∘∘∘)
1. Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la forme algébrique de $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$.

2 Module, argument, forme exponentielle

Exercice 4 (•∘∘)
Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$ donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $2-2i$,
2. $1+i$,
3. $-1+i\sqrt{3}$,
4. $-1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$,
5. $\left(-1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^6$,
6. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$
7. $\cos\alpha + i\sin\alpha$,
8. $\sin\alpha + i\cos\alpha$,
9. $1 + i\tan\alpha$,
10. $(-1)^n + i\sqrt{3}$.

Exercice 5 (•∘∘)
Mettre les nombres suivants sous forme exponentielle :

1. $1+i$,
2. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$,
3. $1+e^{i\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$,
4. $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 6 (•∘∘)
Calculer $(1-i)^{20}$, $(1-i\sqrt{3})^7$, $(1+i\sqrt{3})^9$.

Exercice 7 (••∘)
On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculer z^2 et en déduire le module et l'argument de z.

Exercice 8
On considère le nombre complexe $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

1. Calculer $|z|$.
2. Donner la forme algébrique de z.
3. Calculer z^{2023}.

Exercice 9 (• • ◦)
Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

3 Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 10 (• • ◦)
Soient les complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 - i$.

1. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme trigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 11 (• • ◦)
On pose $a = 1+i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de a, b et ab.
2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$, ainsi que de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4 Résolution d'équations de degré 2, suites récurrentes doubles

Exercice 12 (• ◦ ◦)
Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$.

Exercice 13 (• • ◦)
Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres $z_1 = 3+4i$ et $z_2 = 8-6i$.

Exercice 14 (• ◦ ◦)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = -2$,
2. $z^2 = -a$, où $a > 0$ est un nombre réel positif.

Exercice 15 (• ◦ ◦)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + \dfrac{11}{4} = 0$,
2. $z^2 - z + 1 = 0$,
3. $z^2 = z + 1$,
4. $z^2 - 2z + 2 = 0$,
5. $2z^2 - 3z + 3 = 0$,
6. $(1+i)z^2 = (1-i)z$.

Exercice 16 (• • ◦)
Exprimer le terme général de chacune des suites suivantes :

1. la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$
2. la suite (v_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ $v_0 = 2$, $v_1 = \frac{1}{2}$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{n+1} - \frac{1}{4} v_n.$$

Exercice 17 (• • ∘)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$1 + \frac{z+1}{z-1} + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0.$$
Indication : on pourra utiliser le changement d'inconnue $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

5 Sommes trigonométriques

Exercice 18
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$
Indication : on pourra avantageusement calculer la somme $S_n + i T_n$.

Exercice 19
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
Indication : on pourra avantageusement calculer la somme $S_n + i T_n$.

6 Un fourre-tout

Exercice 20 (• • •)
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -i$. Montrer que
$$\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}\right| = 1.$$

Exercice 21 (• • •)
Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Montrer que
$$|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 22 (• • •)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2\cos(\theta) z + 1 = 0$.
2. Résoudre l'équation $z^4 - 2\cos(\theta) z^2 + 1 = 0$