Chapitre 9

Les ensembles

Sommaire

Dans ce chapitre, nous introduisons des éléments de vocabulaire, de calcul et de logique autour des ensembles mathématiques.

9.1 Appartenance, inclusion, égalité

Définition 9.1: Ensemble et élément.

- Un ensemble E est une collection d'objets distincts, appelés éléments de E.
- Un singleton est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$.

Exemple 9.1.

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles.
- $\{0,1,2,3,4\}$ est un ensemble. Il contient les éléments 0, 1, 2, 3 et 4.

Remarque 9.1. Il y a deux manières classiques de définir un ensemble : <u>en extension</u> et <u>en compréhension</u>.

1. Définir un ensemble en extension, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
2. Définir un ensemble en compréhension, c'est le décrire comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété.

Exemple 9.2.

- Les ensembles
$$\{1,2,3\} \quad \text{et} \quad \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
sont définis en extension.
- Les ensembles
$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } n \in \mathbb{N},\ x = 2^n\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } y \in \mathbb{R},\ x = y^2\}$$
sont définis en compréhension.

Exemple 9.3 (Retour sur la notion d'« ensemble des solutions » d'une équation). Les trois assertions suivantes sont vraies et ont la même signification.

- L'équation du second degré $x^2 - 3x + 2 = 0$ a pour solutions 1 et 2.
- L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ est $\{1, 2\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

La dernière assertion est écrite en langage mathématique. L'ensemble de gauche est un ensemble défini en compréhension. L'ensemble de droite est défini en extension. Il s'agit du même ensemble de nombres.

Définition 9.2 (Appartenance d'un élément à un ensemble)**.** Soit E un ensemble et soit a un élément de E. On dit que a appartient à E et on note $a \in E$. Pour signifier que x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

Définition 9.3 (Inclusion)**.** Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E, c'est-à-dire si

$$\text{pour tout } x, \quad \text{si } x \in F \text{ alors } x \in E.$$

Dans ce cas, on dit aussi que F est un sous-ensemble de E ou que F est une partie de E.

Si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$. Ceci signifie

$$\text{il existe } x \in F \text{ tel que } x \notin E.$$

Exemple 9.4.

Méthode 9.1: Montrer une inclusion

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un autre ensemble B, on procède et on rédige en général de la manière suivante :
Soit $x \in A$.
$\vdots$
Donc $x \in B$.
Donc $A \subset B$.

Exemple 9.5. Soit $A = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ l'ensemble des puissances de 2 et $B = \{2p,\ p \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres pairs. Montrons que $A \subset B$.

Propriété 9.1. *Soit E un ensemble. On a toujours $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.*

Propriété 9.2. *Soient A, B et C trois ensembles. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.*

Définition 9.4 (Egalité)**.** Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux, noté $E = F$ si E et F ont exactement les mêmes éléments, autrement dit si

$$\text{pour tout } x, \quad x \in E \text{ si et seulement si } x \in F.$$

Propriété 9.3 (Double inclusion)**.** *Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux, et note $E = F$ si et seulement si E est inclus dans F et si F est inclus dans E. Autrement dit*

$$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F \quad et \quad F \subset E).$$

Remarque 9.2 (Montrer une égalité d'ensemble par double inclusion). Très souvent, pour montrer que 2 ensembles E et F sont égaux on procède par double inclusion : on montre que $E \subset F$ et que $F \subset E$.

Dans certains cas, on peut raisonner directement par équivalence.

L'égalité entre deux ensembles correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication logique.

Exemple 9.6. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - 6x + 5 = 0\}$ et $F = \{1, 5\}$. Montrons que $E = F$.

9.2 Ensemble des parties

Définition 9.5: Ensemble des parties

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$; autrement dit $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.
Ainsi, pour tout ensemble A,

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemple 9.7.

- Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$.
- Si $E = \{0, 1, 2\}$, alors $\mathscr{P}(E) =$

Remarque 9.3.

- $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles (autrement dit les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles).
- Pour tout ensemble E, $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
- Attention : si $a \in E$, alors on a pas $a \in \mathscr{P}(E)$. Parcontre, on a $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$.

9.3 Opération sur les ensembles

On introduit les opérations de réunion, d'intersection et de passage au complémentaire.

Définition 9.6 (Réunion)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion (ou union) de E et F, et on note $E \cup F$ l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent soit à E soit à F :

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ ou } x \in F\}.$$

Définition 9.7 (Intersection)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F, et on note $E \cap F$ l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à E et à F :

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ et } x \in F\}.$$

Exemple 9.8.

- $\{4,5,8\} \cup \{6,7,9\} =$
- $]-4,20] \cap [10,19] =$
- Si A et B sont deux ensembles, on a les relations suivantes :
  - $A \subset A \cup B$
  - $A \cap B \subset A$
  - $A \cap B \subset A \cup B$

Définition 9.8 (Ensembles disjoints)**.** Deux ensembles E et F sont dits disjoints s'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit si

$$E \cap F = \emptyset.$$

Exemple 9.9. Par exemple

Définition 9.9 (Complémentaire)**.** On appelle complémentaire de F dans E, et on note $E \setminus F$ ou F^c ou encore $\overline{F}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas des éléments de F :

$$E \setminus F = \{x \in E \text{ tels que } x \notin F\}.$$

Exemple 9.10.

- $\{10, 11, 12, 13, 15\} \setminus \{11, 13\} =$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- =$
- $\mathbb{N}^\star =$

Propriété 9.4 (Involutivité du complémentaire)**.** *Soit $A \subset E$. Alors $\overline{\overline{A}} = A$.*

Théorème 9.1 (Complémentaire d'une réunion, d'une intersection)
Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Théorème 9.2
L'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection. Autrement dit, si E est un ensemble et A, B et C sont trois sous-ensembles de E alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

9.4 Produit cartésien

Définition 9.10

Soit E et F deux ensembles. On définit le produit cartésien $E \times F$, noté $E \times F$ (et lu « E croix F ») comme l'ensemble des couples formés d'un élément de E puis d'un élément de F. C'est-à-dire

$$E \times F = \{(x, y)\ ,\ x \in E\ ,\ y \in F\}$$

Si $E = F$ on note $E \times E = E^2$

Remarque 9.4.

- L'ordre est important, en général $E \times F$ est différent de $F \times E$.
- Il ne faut pas confondre le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$.
- La notation E^2 se généralise à $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$
- On appelle les éléments de E^2 des *paires*, les éléments de E_3 des *triplets* et, pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle les éléments de E^n des n-*listes* ou des n-*uplets*.

Exemple 9.11.

- $\{0, 1\}^2 =$
- $\{0, 1, 2\}^2 =$
- Jeu de cartes : si $E = \{\text{As, Roi, Dame, Valet, } 10, 9, \ldots, 3, 2\}$ représente l'ensemble des valeurs possibles du jeu de carte et $F = \{\text{ Pique, Coeur, Carreau, Trèfle }\}$ représente l'ensemble des couleurs possibles du jeu de carte alors
  $E \times F =$
- Produit cartésien de trois intervalles :

- $\mathbb{R}^2 =$

- $\mathbb{R}^3 =$