TD₉ Ensembles

Remarque 1 (Une notation utile) Lorsque a et b sont entiers relatifs, avec $a \leq b$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{a, a+1, a+2, \dots, b-1, b\}.$$

C'est l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs compris entre a et b .

Exercice 1 (•••)

Écrire en extension les ensembles suivants

1. $\{n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < n \leq 2\pi\}$,	3. $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 0, 2 \rrbracket$,
2. $\{x^2, x \in \{-1, 1, 2\}\}$,	4. $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \{0, 2\}$.

Exercice 2 (•••)

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer toutes les parties de E .

Exercice 3 (•••)

Soient A , B et C trois ensembles.

1. Montrer que si $C \subset A \cap B$ alors $C \subset A$ et $C \subset B$ (n'hésitez pas à faire un schéma).
2. Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraîne que $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Exercice 4 (•••)

On définit les deux parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\}.$$

1. A et B sont-ils respectivement définis en extension ou en compréhension?
2. Donner deux éléments de A et deux éléments de B .
3. Montrer que $B \subset A$.
4. Montrer que $A \subset B$ et conclure que $A = B$.
5. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble?

Exercice 5 (•••)

Soient A et B deux ensembles. On souhaite montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

1. Représenter la situation sur un schéma.
2. On suppose que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A \subset B$ puis que $B \subset A$. En déduire que $A = B$.
3. Montrer que si $A = B$ alors $A \cup B = A \cap B$. Conclure quand à la question initiale.

Exercice 6 (•••)

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On définit la différence symétrique de A et de B par

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

1. Représenter l'ensemble $A \Delta B$ sur un dessin.
2. Que vaut $A \Delta E$? $A \Delta A$?
3. Montrer que $A \Delta B = B \Delta A$.
4. Donner une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on ait $A \Delta X = A$.
5. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, donner une partie $A' \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A \Delta A' = E$.
6. Montrer (en raisonnant par double inclusion) que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.