Chapitre 10

Systèmes linéaires

Sommaire

Dans tout le chapitre, on désigne par la lettre $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

10.1 Introduction

Exemple 10.1. Résolution du système

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=1 \\ 3x+4y=5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & -1 \\ y-z & = & 2 \end{array}\right.$$

par substitution puis par combinaison.

Ces deux méthodes de résolution sont basées sur la réduction du nombre d'inconnues. La méthode par substitution devient très fastidieuse quand le nombre d'inconnues augmente : elle entraîne beaucoup de calculs, avec donc de fortes chances de se tromper. La méthode par combinaison, elle, est plus simple, c'est donc cette méthode qui est privilégiée pour les "gros" systèmes linéaires.

10.2 Vocabulaire

Définition 10.1: Système linéaire, inconnues, équations

Soient n et p des entiers naturels non nuls.

- Une *équation linéaire à p inconnues* est une équation de la forme $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_px_p = b$; dans cette équation, $a_1, a_2, \dots, a_p, b \in \mathbb{K}$ sont des constantes et $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des inconnues dans $\mathbb{K}$.
- Un *système linéaire de n équations à p inconnues* est la donnée de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \dots, x_p$.
- On écrit sous cette forme un tel système :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

  Les $a_{i,j}$ sont les *coefficients* du système. Les b_i constituent le *second membre* de l'équation. Enfin, $x_1, \dots, x_p$ sont les *inconnues* du système.
  Remarquer que dans l'écriture $a_{i,j}$, i désigne le numéro de la ligne (donc l'équation) tandis que j désigne la colonne (donc l'inconnue).

Définition 10.2: Solution d'un système linéaire

Soient n et p des entiers naturels non nuls et

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

un système linéaire a n équations et p inconnues. Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations de (S).

Définition 10.3: Système homogène, système compatible

- Un système linéaire est *homogène* si tous les b_j sont nuls. Le *système homogène associé* à un système linéaire est le système obtenu en gardant les mêmes coefficients mais en annulant le second membre.
- Un système est *compatible* s'il admet au moins une solution; *incompatible* sinon.

Exemple 10.2. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le système suivant, de 2 équations à 2 inconnues x et y.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & = & 18 \\ x-2y & = & -5 \end{array}\right.$$

Le système homogène associé est le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

$(1,3)$ est une solution de (S).

Exemple 10.3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le système suivant, de 3 équations à 3 inconnues x et y.

$$(S)\left\{\begin{array}{cl} x+y+z & =3 \\ x-2y & =-1 \\ y-z & =0 \end{array}\right.$$

Le système homogène associé est le système

$$\left\{\begin{array}{cl} x+y+z & =0 \\ x-2y & =0 \\ y-z & =0 \end{array}\right.$$

$(1,1,1)$ est une solution de (S).

Remarque 10.1. Tout système homogène est compatible : une solution est donnée en prenant toutes les inconnues égales à 0.

10.3 Résolution d'un système échelonné

Définition 10.4. Un système linéaire est *échelonné* si le nombre de coefficients nuls en début de ligne augmente strictement avec l'indice de la ligne (si, pour un indice, tous les coefficients de la ligne sont nuls, on demande que tous les coefficients des lignes en-dessous soient nuls aussi).

Exemple 10.4. Le système $(\mathscr{S})$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x-2y & + & 3z & & & = & 0 \\ & & 3z & - & t & = & 1 \\ & & & & t & = & 2 \end{array}\right.$$

est échelonné. Il y a 0 coefficient nul en début de la première ligne, 2 coefficients nuls en début de la deuxième ligne, 3 en début de la dernière ligne.

Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

n'est pas échelonné.

Il est facile de résoudre un système échelonné en partant des lignes du bas et en substituant au fur et à mesure les valeurs trouvées pour les différentes variables.

Mais on n'a pas nécessairement une solution unique pour chaque variable. Pour comprendre cette subtilité, on introduit le vocabulaire suivant :

Définition 10.5. Étant donné un système échelonné, on appelle *variable principale* toute variable qui apparait sur une ligne comme la première avec un coefficient non nul.

On appelle *variable secondaire* une variable qui n'est pas principale.

La règle est alors la suivante : les variables secondaires peuvent prendre n'importe quelle valeur et doivent être traitées comme des paramètres, plutôt que comme des variables. Cela signifie qu'on les traite comme des constantes.

Exemple avec le système $(\mathscr{S})$ donné plus haut.

Exemple 10.5. (x, y, z, t) est solution de $(\mathscr{S})$

$$\iff \begin{cases} t &= 2 \\ z &= \dfrac{1+t}{3} = 1 \\ x &= 2y - 3z = 2y - 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc l'ensemble $\{(2y-3, y, 1, 2), y \in \mathbb{R}\}$. On voit que la variable y a un statut de paramètre (de degré de liberté), c'est donc une variable secondaire.

On écrit alors l'ensemble des solutions comme $\{(2y-3, y, 2, 1), y \in \mathbb{K}\}$.

Remarque 10.2.

- On fera attention à écrire les variables dans le bon ordre quand on écrit l'ensemble des solutions.
- L'ensemble des solutions peut être écrit comme l'ensemble

$$\{(-3, 0, 1, 2) + y(2, 1, 0, 0), y \in \mathbb{K}\}.$$

On met ainsi en évidence la structure des solutions : somme d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

Un autre exemple. Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} x - y + z + t &= 2 \\ z - t &= -1 \end{cases}$$

avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Les variables x et z sont principales; on considère donc y et t comme des paramètres. Ainsi (x, y, z, t) est solution si et seulement si

$$\begin{cases} z &= -1 + t \\ x &= 2 - t - z + y = 2 - t - (-1 + t) + y = 3 - 2t + y \end{cases}$$

L'ensemble des solution est donc

$$\{(3 - 2t + y, y, -1 + t, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

qu'on peut aussi écrire comme

$$\{(3, 0, -1, 0) + y(1, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 1), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

10.4 Résolution d'un système général

10.4.1 Opérations élémentaires

Définition 10.6. Étant donné un système linéaire $(\mathscr{S})$ de n équations et p inconnues, on appelle *opération élémentaire* l'une des opérations suivantes sur les lignes du système :

— **Échange** : on permute les lignes L_i et L_j, avec i et j deux indices distincts. (notation $L_i \leftrightarrow L_j$)

— **Transvection** : on ajoute à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j. (notation $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$)

— **Multiplication** : on multiplie une ligne L_i par un scalaire λ non nul. (notation $L_i \leftarrow \lambda L_i$)

Définition 10.7. Deux systèmes linéaires (portant sur les mêmes inconnues) sont *équivalents* si on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'opérations élémentairs.

Propriété 10.1. *Deux systèmes linéaires équivalents ont le même ensemble de solutions.*

Démonstration. Si on considère un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ solution du système initial, il est clair qu'il est encore solution du système obtenu après opération élémentaire.

Mais les opérations élémentaires sont inversibles, au sens où elles peuvent être annulées par une autre opération élémentaire pour retrouver le système initial :

— Appliquer deux fois l'échange $L_i \leftrightarrow L_j$ ne fait rien.

— Appliquer $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ ne fait rien.

— Appliquer $L_i \leftarrow \lambda L_i$ puis $L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$ ne fait rien ($\lambda \neq 0$!)

Ceci prouve réciproquement que si $(x_1, \dots, x_p)$ est une solution du nouveau système, il est aussi solution du système initial, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 10.6. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y & = -2 \\ 3x-y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 3x-y & = 1 \\ x+2y & = -2 \ (L_1 \leftrightarrow L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y & = -2 \\ 3x-y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 4x+y & = -1 \ (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x-y & = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y & = -2 \\ 3x-y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 2x+4y & = -4 \ (L_1 \leftarrow 2L_1) \\ 3x-y & = 1 \end{array}\right.$$

Remarque 10.3. — On écrit toujours les opérations élémentaires que l'on effectue.

— Les opérations élémentaires simultanées sont le plus souvent interdites. La seule exception est l'ajout d'un multiple d'une **même** ligne aux autres lignes du système.

Ci-dessous une erreur obtenue en faisant des opérations simultanées :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y & = 2 \\ x-y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 2y & = 1 \ (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ -2y & = -1 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right.$$

L'équivalence est fausse : le système de gauche a une unique solution $(3/2, 1/2)$, celui de droite a pour solutions tous les couples de la forme $(x, 1/2)$, avec x quelconque.

10.4.2 Algorithme du pivot de Gauss

L'objectif est de transformer un système linéaire en un système échelonné équivalent, qu'on peut alors résoudre.

On part d'un système linéaire $(\mathscr{S})$ à n lignes et p inconnues $x_1, \dots, x_p$:

- Si la première inconnue x_1 n'apparait pas dans le système, on passe à l'étape suivante.
- Si x_1 apparait sur une ligne, on peut le faire apparaître sur la première ligne, quitte à faire un échange de deux lignes.
- Si x_1 apparait sur la première ligne, on peut ajouter à chacune des autres lignes L_i, $i \geq 2$, un multiple de la ligne L_1, afin de faire disparaître x_1 des lignes L_i, pour $i \geq 2$.

Après cette première étape, l'inconnue x_1 apparait dans le système seulement sur la première ligne (ou pas du tout). On recommence cette procédure avec le sous-système de $n-1$ équations (lignes $L_2, \dots, L_n$) et $p-1$ inconnues $x_2, \dots, x_p$. Ainsi de suite... jusqu'à obtenir un système échelonné. Comme chaque opération élémentaire transforme un système en système équivalent, le système échelonné est équivalent au système initial.

Remarque 10.4.

- L'opération élémentaire de multiplication n'est pas nécessaire pour cet algorithme. Cependant, elle permet parfois de limiter les erreurs de calcul (notamment pour manipuler des coefficients entiers plutôt que des fractions).
- De même, pour limiter les erreurs, on peut avoir intérêt à faire une permutation de deux lignes pour avoir le coefficient le plus simple possible devant la variable qu'on va éliminer des autres lignes (le mieux, c'est d'avoir 1 ou -1 devant cette variable).

Exemple 10.7. On résout, pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & + & t & = 3 \\ 2x & + & 2y & + & z & & & = 2 \\ x & + & 2y & & & - & t & = 1 \\ & - & y & - & 2z & + & 3t & = 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & + & t & = 3 \\ & & & & 5z & - & 2t & = -4 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & y & + & 2z & - & 2t & = -2 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ & - & y & - & 2z & + & 3t & = 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & + & t & = 3 \\ & & y & + & 2z & - & 2t & = -2 \\ & & & & 5z & - & 2t & = -4 \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ & - & y & - & 2z & + & 3t & = 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & + & t & = 3 \\ & & y & + & 2z & - & 2t & = -2 \\ & & & & 5z & - & 2t & = -4 \\ & & & & & & t & = 2 \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ z = \frac{-4+2t}{5} = 0 \\ y = -2 + 2t - 2z = 2 \\ x = 3 - t + 2z - y = 3 - 2 + 0 - 2 = -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution du système est $(-1, 2, 0, 2)$.

Exercice 10.1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + z - 3t = -1 \\ -z + t = -3 \end{cases}$$

Définition 10.8. Soit (S) un système linéaire échelonné. Le premier coefficient non nul de chaque ligne (s'il existe) s'appelle un pivot. Une équation admettant un pivot s'appelle équation principale. Une équation sans pivot s'appelle équation auxiliaire.

Exemple 10.8. Déterminer les pivots du système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 10 \\ 3y + z = 5 \\ 6z = 9 \end{cases}$$

Remarque 10.5.
- Le choix du pivot à chaque étape est fondamental pour éviter la complexité des calculs.
- Les meilleurs pivots sont 1 et -1.

Exercice 10.2. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant (on veillera à effectuer un choix judicieux de pivot) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

10.5 Rang d'un système linéaire, système de Cramer

Remarque 10.6. Le système échelonné obtenu après l'algorithme du pivot de Gauss (appelé réduite de Gauss) n'est pas unique car il dépend du choix des pivots à chaque étape. Par contre on a le résultat suivant.

Propriété 10.2: Rang d'un système linéaire

Toutes les réduites de Gauss d'un système linéaire ont le même nombre de pivots. Ce nombre est appelé le *rang* du système linéaire.

Remarque 10.7. Le rang d'un système est aussi égal au nombre de variables principales de n'importe quel réduite de Gauss du système initial.

Exemple 10.9. Étudier le rang du système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant (on veillera à effectuer un choix judicieux de pivot) et le résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 2x - y + 7z = 3 \end{cases}$$

On effectuera deux réductions de Gauss différentes en choisissant la première ou la seconde équation comme premier pivot. On illustre que le rang vaut 2 ainsi que l'ensemble des solutions, le tout étant indépendant du choix du pivot.

Propriété 10.3. *Le rang d'un système est inférieur ou égal au nombre d'inconnues et au nombre d'équations du système.*

Démonstration. D'une part, le nombre de variables principales est inférieur au nombre de variables.

D'autre part, chaque variable principale apparait par définition comme première variable d'une certaine ligne. Le nombre de variables principales est donc inférieur au nombre de lignes. □

Définition 10.9. Soit $(\mathscr{S})$ un système de n équations et n inconnues. On dit que $(\mathscr{S})$ est un *système de Cramer* si son rang est égal à n.

Remarque 10.8.

— Cette définition n'a de sens que si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.

— Gabriel Cramer, mathématicien suisse du 18ème siècle.

Exemple 10.10. Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & + & 4z & = 1 \\ x & - & y & + & z & = 2 \\ x & + & 3y & + & 9z & = 3 \end{array}\right.$$

est un système de Cramer, car il possède le même nombre d'inconnues et d'équations (3), et ce nombre est égal au rang du système.

Propriété 10.4. *Si $(\mathscr{S})$ est un système de Cramer, il admet une unique solution, quel que soit le second membre.*

Démonstration. Dans la résolution du système échelonné équivalent, il n'y a pas de variable secondaire. On trouve ainsi une unique valeur pour chaque inconnue, en partant de la dernière et en raisonnant de proche en proche. □

Exemple 10.11. On reprend la réduite de Gauss du système précédent pour illustrer que quelque soit le second membre, on obtient une solution unique.

Remarque 10.9. Au contraire, si un système de n équations et n inconnues n'est *pas* de Cramer, la situation est très différente. On peut montrer que, selon la valeur du second membre, il y aura une infinité de solutions ou aucune.

Exemple 10.12.

1. Soit le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} 2x & + & 4y & + & 6z & = 1 \\ x & - & y & + & 2z & = 2 \\ 5x & + & 7y & + & 14z & = 4 \end{array}\right.$$

   On montre que le rang du système vaut 2, qu'il n'est donc pas de Cramer, et qu'il y a une infinité de solutions.

2. Si le second membre vaut maintenant par exemple $(1,2,3)$ alors il n'y a aucune solution car on obtient une incompatibilité.

Remarque 10.10. De manière générale, si le système (S) a n équation et n inconnues et n'est pas de Cramer, on est dans la situation suivante, après application de l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & \alpha_{2,2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,p}x_p & = & \beta_2 \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \alpha_{r,r}x_r & +\dots+ & \alpha_{r,p}x_p & = & \beta_r \\
 & & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & 0 & = & \beta_n
\end{array}\right.$$

où les pivots $\alpha_{i,i}$ sont non nuls, et les β_i sont les nombres obtenus après transformation du second membre. On distingue les équations principales et les équations auxiliaires.

On a deux situations possibles :

- Si $\forall\, i \in \{r+1,\dots,n\}$, $\beta_i = 0$ alors le système est compatible et admet une infinité de solutions, exprimées grâce aux variables secondaires.
- Si $\exists\, i \in \{r+1,\dots,n\}$ tel que $\beta_i \neq 0$ alors le système est incompatible.

10.6 Structure des solutions d'un système linéaire

10.6.1 Notion de vecteur

On se place dans $\mathbb{K}^p$, ensemble dont les éléments sont les p-uplets $(x_1,\dots,x_p)$ avec les x_i dans $\mathbb{K}$.

Notons que l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n équations et p inconnues est l'ensemble des p-uplets $(x_1,\dots,x_p)$ qui vérifient ces n équations ; c'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$.

Les éléments de $\mathbb{K}^p$ sont appelés *vecteurs*, tandis que ceux de $\mathbb{K}$ sont des scalaires. On aura seulement besoin de deux opérations sur les vecteurs, qui généralisent celles connues sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

- On peut additionner deux vecteurs : si $(x_1,\dots,x_p)$ et $(x'_1,\dots,x'_p)$ sont des vecteurs dans $\mathbb{K}^p$, on définit leur somme coordonnée par coordonnée :

$$(x_1,\dots,x_p)+(x'_1,\dots,x'_p) = (x_1+x'_1,\dots,x_p+x'_p).$$

- On peut multiplier un scalaire et un vecteur : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\lambda(x_1,\dots,x_p) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_p).$$

Ce vocabulaire permet de préciser la *structure* de l'ensemble des solutions, c'est-à-dire de décrire certaines propriétés de cet ensemble.

10.6.2 Structure des solutions

On distingue le cas d'un système homogène et d'un système général.

Théorème 10.1: Structure des solutions d'un système homogène

On considère un système $(\mathscr{S}_H)$ homogène à p équations et n inconnues.

- Le vecteur nul $(0,0,\ldots,0) \in \mathbb{K}^p$ est une solution de $(\mathscr{S}_H)$.
- Si $(x_1,\ldots,x_p)$ et $(x'_1,\ldots,x'_p)$ sont des solutions de $(\mathscr{S}_H)$, alors la somme $(x_1,\ldots,x_p) + (x'_1,\ldots,x'_p)$ est aussi une solution de $(\mathscr{S}_H)$.
- Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une solution de $(\mathscr{S})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, alors $\lambda(x_1,\ldots,x_p)$ est aussi une solution de $(\mathscr{S}_H)$.

Théorème 10.2: Structure des solutions d'un système général

On considère un système linéaire $(\mathscr{S})$ à p équations et n inconnues, et on note $(\mathscr{S}_H)$ le système homogène associé. On note $(x_1,\ldots,x_p)$ une solution quelconque de $(\mathscr{S})$.
Si $(y_1,\ldots,y_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, alors $(y_1,\ldots,y_p)$ est une solution de $(\mathscr{S})$ ssi la différence $(x_1,\ldots,x_p)-(y_1,\ldots,y_p)$ est une solution de $(\mathscr{S}_H)$.

On ne montre pas ces deux théorèmes mais on va les vérifier sur un exemple.

Exemple 10.13. On reprend le système homogène $(\mathscr{S}_H)$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 3x+5y &= 0 \\ x-2y &= 0 \end{cases}$$

- $(0,0)$ est bien solution de $(\mathscr{S}_H)$ puisque $3\times 0+5\times 0=0$ et que $0-2\times 0=0$.
- Notons (x,y) et (x',y') deux solutions de $(\mathscr{S}_H)$. On a

$$3(x+x')+5(y+y') = (3x+5y)+(3x'+5y') = 0+0=0$$

$$\text{et } (x+x')-2(y+y') = (x-2y)+(x'-2y') = 0-0=0.$$

  Donc $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$ est solution de $(\mathscr{S}_H)$.
- Notons (x,y) une solution de $(\mathscr{S}_H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a

$$3(\lambda x)+5(\lambda y) = \lambda(3x+5y) = \lambda\times 0 = 0$$

$$\text{et } (\lambda x)-2(\lambda y) = \lambda(x-2y) = \lambda \times 0 = 0.$$

  Donc $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ est une solution de $(\mathscr{S}_H)$.

Si $(\mathscr{S})$ est le système

$$\begin{cases} 3x+5y &= 2 \\ x-2y &= 1 \end{cases}$$

et que (x_0,y_0) en est une solution particulière, on a

$$3x_0+5y_0 = 2 \text{ et } x_0-2y_0 = 1.$$

Considérons (x, y) un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&(x,y) \text{ est solution de } (\mathscr{S})\\
&\qquad \iff 3x+5y=2 \text{ et } x-2y=1\\
&\qquad \iff 3x+5y=3x_0+5y_0 \text{ et } x-2y=x_0-2y_0\\
&\qquad \iff 3(x-x_0)+5(y-y_0)=0 \text{ et } (x-x_0)-2(y-y_0)=0\\
&\qquad \iff (x-x_0, y-y_0) \text{ est solution de } (\mathscr{S}_H).
\end{aligned}$$

Remarque 10.11. On n'aura pas besoin de ces théorèmes pour des résolutions explicites de systèmes linéaires. Mais on verra que l'ensemble des solutions se présente toujours de la même façon, du fait de cette structure particulière.

10.7 Systèmes linéaires avec paramètres

10.7.1 Paramètres dans le second membre

Exemple 10.14. Discuter selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & y & - & z & =1,\\ x & - & 2 & + & 2z & =a,\\ x & + & y & - & z & =1. \end{array}\right.$$

10.7.2 Paramètres dans les coefficients

Exemple 10.15. Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3,\\ mx & + & 4y & = & 6. \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3,\\ mx & + & 4y & = & 6. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & = & -3, & & \\ & & (4-m^2)y & = & 6+3m & = & 3(m+2). \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - mL_1)$$

Discutons selon les valeurs de m.

- Si $m \neq 2$ et $m \neq -2$, alors $4-m^2 \neq 0$. (S) est de rang 2 et admet une unique solution. L'ensemble de ses solutions est
$$\left\{\left(\frac{6}{m-2}, \frac{-3}{m-2}\right)\right\}.$$
- Si $m = 2$ la deuxième ligne du système devient $0 = 12$ donc le système est incompatible.
- Si $m = -2$, la deuxième ligne du système devient $0 = 0$. Le système est alors de rang 1. x est une variable principale, y est une variable secondaire. L'ensemble des solutions de (S) est
$$\left\{(-3-my, y), \quad y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Géométriquement, on en déduit que les droites d'équation $x + my = -3$ et $mx + 4y = 6$ sont

- Sécantes si $m \neq 2$ et $m \neq -2$, avec comme point d'intersection unique $\left(\frac{6}{m-2}, \frac{-3}{m-2}\right)$.
- Parallèles et distinctes si $m = 2$.
- Confondues si $m = -2$.