

TD₁₀ Systèmes linéaires

1 Préambule

Exercice 1

Dans une ferme élevant des lapins et des poulets, il y a au total 27 animaux et 72 pattes d'animaux. Combien y a-t-il de lapins et de poulets?

Exercice 2

Au marché de Saint-Maur-des-Fossés, on peut trouver des poireaux, des tomates et des oranges sanguines. Riri achète 1 kilogramme de poireaux, 1 kilogramme de tomates et 1 kilo d'oranges, et paye au total 8 euros. Fifi achète 1 kilogramme de poireaux, 2 kilogrammes de tomates et 3 kilogrammes d'oranges, et paye au total 17 euros. Loulou achète 2 kilogrammes de poireaux, 4 kilogrammes de tomates et 5 kilogrammes d'oranges, et paye finalement 31 euros.

En écrivant un système de 3 équations à 3 inconnues, déterminer le prix au kilo des poireaux, des tomates et des oranges sanguines au marché de Saint-Maur-des-Fossés.

2 Sans paramètres

Exercice 3

Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2y = 4 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 4z = 8 \end{cases} \\
 (S_3) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2z + t = -1 \end{cases} & \quad (S_4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 3x_4 + 2x_5 = -1, \\ 2x_5 = -6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x - z = 2, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + z = -1, \\ x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = -6. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1, \\ x - y - z + t = 2, \\ x - y - z - t = 3. \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x + y - z = 3, \\ 5x + 5y + 9z = 7, \\ 2x - 6y + 14z = -2. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4, \\ x + 3y - z = 11, \\ 2x + 5y - 5z = 13, \\ x + 4y + z = 18. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4, \\ x + 3y - z = 11, \\ 2x + 5y - 5z = 13, \\ x + 4y + z = 12. \end{cases}$$

3 Avec paramètres dans le second membre

Exercice 5

Résoudre les systèmes suivants selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1, \\ x - 2y + 2z = a, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ -x + y + z = 1 - 3a, \\ -x + 4y + z = 1 - 9a, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - t = -1, \\ x + 2y + 4z - 2t = -3, \\ x + 2y + 3z + t = a, \\ x + y + z - t = -1. \end{cases}$$

4 Avec paramètres dans les coefficients

Exercice 6

Suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes linéaires suivants :

1.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + m^2 y = m. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} (m-1)x - my = m, \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m, \\ mx + (m+1)y = 1. \end{cases}$$

Exercice 7

Déterminer le rang et résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0, \\ x + (1-\lambda)y + z = 0, \\ x + y + (1-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - y - z = 0, \\ 2x + (2-\lambda)y - z = 0, \\ 2x - y + (2-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y - 2z = 0, \\ 2x - (1+\lambda)y - 4z = 0, \\ -x + y + (3-\lambda)z = 0. \end{cases}$$