DS4 – Mathématiques

Mercredi 11 Décembre 2024

Durée : 3 heures

- **Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.**
- Le devoir comporte cinq exercices de mathématiques et un exercice d'informatique.
- **Utilisez des feuilles doubles uniquement. Rédigez l'exercice d'informatique sur une copie double séparée.**
- La qualité de la présentation et de la rédaction, la lisibilité et la précision seront prises en compte pour une part importante de la note finale.

Exercice 1 (Informatique)**.** Une classe de BCPST étudie une nouvelle bactérie. Chaque élève reçoit une boîte de Pétri contenant 100 bactéries et doit compter le nombre de bactéries qu'elle contient au bout d'une semaine. Les résultats de la classe sont stockés dans une liste Python `L` : la k-ème valeur de `L` est égale au nombre de bactéries dans la boîte de Pétri du k-ème élève.

1. Écrire une fonction `moyenne` prenant en argument une liste `L` et renvoyant sa moyenne.
2. Écrire une fonction `maximum` prenant en argument une liste `L` et renvoyant son maximum.

Après un certain temps, on se demande si la population de bactéries a augmenté dans toutes les boîtes de Pétri, c'est-à-dire si les éléments de la liste `L` sont tous supérieurs à 100.

3. Écrire une fonction `tousplus` prenant en argument une liste `L` et renvoyant `True` si tous les éléments de `L` sont supérieurs à 100 et `False` sinon.

On visualise les mesures faites par la classe sur un graphique. Certaines mesures révèlent une croissance de la population x de bactéries ($x > 100$) quand d'autres révèlent une décroissance de cette population ($x < 100$). On souhaite séparer ces deux groupes de données.

4. Écrire une fonction `separe` prenant en argument une liste `L` et renvoyant deux listes L_+ et L_- contenant respectivement les éléments de `L` supérieurs à 100 et ceux strictement inférieurs à 100. Par exemple, si `L = [112, 83, 100, 130, 90]` alors `separe(L)` doit renvoyer les listes `L+ = [112, 100, 130]` et `L- = [83, 90]`. *(Indication : on rappelle que si M est une liste, alors l'instruction* `M.append(x)` *ajoute l'élément x en dernière position de M.)*
5. Déduire des questions précédentes une fonction `moy_bis` prenant en argument une liste `L` et renvoyant les nombres m_+ et m_- où m_+ (respectivement m_-) est la moyenne des mesures de `L` supérieures (respectivement strictement inférieures) à 100.

Exercice 2 (Autour du cours et du TD)**.**

1. (a) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intevalle I et soit $x_0 \in I$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.

   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3$ au point d'abscisse $x_0 = 1$. Tracer la courbe de la fonction f et y dessiner la tangente dont l'équation a été déterminée à la question précédente.
2. Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants $z_1 = (-1+i)^5$ et $z_2 = \dfrac{2i(i-1)}{3+3i\sqrt{3}}$.
3. Résoudre l'équation (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) : $z^2 = -i$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser la quantité $\cos(\theta)^4$.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = -3\sqrt{3}u_{n+1} - 9u_n.$$

   Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (Une étude de fonction trigonométrique)**.** On souhaite étudier la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = 1 + \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Justifier que pour étudier f sur son domaine de définition, il est suffisant de l'étudier sur l'intervalle $I = [0,\pi]$.
3. Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$,
$$f'(x) = -2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right).$$
4. Rappeler la monotonie de la fonction cos sur l'intervalle I et en déduire le signe de $\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)$ sur I.
5. Dresser le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f sur I.
6. Sur un même graphique, représenter la courbe de représentative de f sur I puis sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$ en expliquant (précisément mais succinctement) votre démarche.

Exercice 4 (Nombres complexes et trigonométrie)**.** On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Déterminer la forme exponentielle de z_3.
2. Déterminer la forme algébrique de z_3.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5. On souhaite étudier la fonction $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de φ, noté I dans la suite.
2. Justifier que pour tout $x \in I$,
$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1+x)^2}$$
où h est une fonction dérivable sur I.
3. Calculer h' et étudier les variations de h sur I.
4. Établir le tableau de variations de φ. *(Indication : on donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.)*
5. Tracer la courbe représentative de φ sur I.

Exercice 6. On note $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, et on note $A = \alpha + \alpha^4$ ainsi que $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

1. Montrer que $\alpha^5 = 1$. En déduire que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$.
2. Montrer que A et B sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
3. Prouver grâce aux formules d'Euler que
$$A = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad B = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$
4. Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
5. Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.