DM4 – Mathématiques

A rendre le lundi 6 janvier 2025

On attachera un soin particulier à la qualité de la rédaction et à la présentation !

FIGURE 1 – Bonnes vacances !

Exercice 1. Dans cet exercice, on étudie de 3 façons différentes la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = iz_n + 3 - i. \tag{1}$$

1. *En revenant aux suites réelles.*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \text{Re}\,(z_n)$ et $y_n = \text{Im}\,(z_n)$ ainsi que $a_n = x_n - 2$.
   Ainsi, on a notamment
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = x_n + iy_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}.$$
   (a) A l'aide de la relation de récurrence (1), et en procédant à l'identification des parties réelles et imaginaires, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n, pour $n \in \mathbb{N}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_{n+2} = -a_n.$$
   (c) Calculer a_0 et a_1, et en déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de x_n puis de y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$
2. *En s'inspirant des suites arithmético-géométriques.*
   (a) Résoudre l'équation $z = iz + 3 - i$, on note l son unique solution.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = z_n - l$?
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 2 + i - i^{n+1},$$
   puis retrouver le résultat de la question 1.(d).
3. *Géométriquement.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point d'affixe z_n.
   (a) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.
   (b) Si M est un point d'affixe z, quelle transformation géométrique transforme M en le point d'affixe iz ? en le point d'affixe $iz + 3 - i$?

(c) Que peut-on dire de M_n et M_{n+4} pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(d) Retrouver le résultat de la question 3.(c) en utilisant la formule de la question 1.(d).

Exercice 2. Reprendre l'exercice d'informatique du DS 4.

ou *(on rappelle qu'en maths le ou peut-être inclusif)*

Exercice 3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{T}_\lambda) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} (3-\lambda)\,x & - & y & - & z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 0 \\ -x & + & y & + & (3-\lambda)\,z & = 0 \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système $(\mathcal{T}_\lambda)$ lorsque $\lambda = 1$ et lorsque $\lambda = 2$.
2. On revient au cas général où $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de $(\mathcal{T}_\lambda)$ et résoudre $(\mathcal{T}_\lambda)$ en fonction du paramètre λ.