Chapitre 11

Applications

Sommaire

11.1 Définitions

Définition 11.1: Application

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F est un procédé qui à chaque élément de E associe un unique élément de F que l'on note $f(x)$.
On note cela

$$f: \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}.$$

On appelle E l'*ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée*. On dit que $f(x)$ est ***l'image*** de x par f et que x est ***un*** *antécédent de* $f(x)$. L'ensemble des applications de E dans F sera noté $\mathscr{A}(E,F)$ ou bien F^E.

Diagramme en patate

Exemple 11.1. 1. L'application $f: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$ est appelée application *identité* de E. On la note Id_E.

2. L'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$: 4 est l'image de 2 par g, car $g(2) = 4$. C'est aussi l'image de -2 par g car $g(-2) = 4$.
   3 et -3 sont les seuls antécédents de 9 par g, car $g(3) = g(-3) = 9$.
3. Soit A une partie de E. On définit l'application *indicatrice* de A, notée $\mathbf{1}_A$ par

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

   Par exemple, graphe de l'indicatrice du segment $[0,1]$:

Définition 11.2. Deux applications f et g sont dite égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ E.
- $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Définition 11.3: Ensemble image

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. On appelle *image directe* de A par f l'ensemble $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{f(x)\ ,\ x \in A\}.$$

Exemple 11.2.

- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. Alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ et $f(]-2,2[) = [0,4[$.
- Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$. Alors $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, $g([0,1]^2) = [0,2]$.
- Soit $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$. Alors $h(\mathbb{R}) = [-1,1]$, $h([0,\pi/2]) = [0,1]$.

11.2 Injection et surjection

11.2.1 Définitions

Définition 11.4

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

- On dit que f est une surjection ou est surjective si tout élément de F admet *au moins un* antécédent par f.
- On dit que f est une injection ou est injective si tout élément de F admet *au plus un* antécédent par f.

Propriété 11.1. *Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.*

- *f est surjective si et seulement si*

$$\forall\, y \in F, \quad \exists\, x \in E, \quad y = f(x)$$

- *f est injective si et seulement si*

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Démonstration.

- Pour la surjectivité il s'agit juste d'une réécriture de la définition.
- Supposons d'abord que f est injective. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors l'élément $f(x)$ admet deux antécédents par f qui sont x et y ce qui entraîne que $x = y$. Ainsi, si f est injective alors

$$\forall\,(x,y) \in E^2 \;\; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Réciproquement supposons maintenant que

$$\forall\,(x,y) \in E^2 \;\; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

et montrons que f est alors injective.

Soit $z \in F$, supposons par l'absurde que z admet au moins deux antécédents par f. Soit alors a et b deux antécédents de z par f avec $a \neq b$. Alors $z = f(a) = f(b)$. D'où, par hypothèse $a = b$ ce qui est absurde.

□

Exemple 11.3.

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est surjective mais pas injective.
2. $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x \end{array}$ est surjective et injective.
3. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ est injective mais pas surjective.
4. $k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{array}$ n'est ni injective ni surjective.

11.2.2 Comment prouver qu'une application est injective ? surjective ?

Propriété 11.2. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone alors f est injective.*

Démonstration. Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit f une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Pour fixer les idées supposons que f est strictement croissante. Montrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in I^2$. Supposons que $f(x) = f(y)$ et montrons qu'alors $x = y$.

Par l'absurde si $x \neq y$ alors $x < y$ ou $y < x$. Toutefois, si $x < y$ alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) < f(y)$ ce qui est absurde car $f(x) = f(y)$. De même, si $y < x$, on a $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde.

Ainsi $x = y$. f est donc bien injective. □

Remarque 11.1. La réciproque est fausse : une fonction injective n'est pas forcément monotone. Par exemple la fonction inverse est injective mais n'est pas monotone.

Méthode 11.1: Montrer qu'une fonction est surjective

Pour montrer qu'une application f de E dans F est surjective une méthode générale consiste à :

1. Poser un élément *quelconque* y de F.
2. Trouver ensuite un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, ce qui revient à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x.
3. S'il existe un élément x qui convient, et ce pour toutes les valeurs de $y \in F$ alors f est bien surjective.

Méthode 11.2: Montrer qu'une fonction est injective

Pour montrer qu'une application f de E dans F est injective on peut :

1. Dans le cas particulier d'une fonction réelle, vérifier que f est strictement monotone.
2. Si vous n'êtes pas dans la situation de la proposition ou si f n'est pas strictement monotone, poser deux éléments (x, y) quelconques de E dont on suppose qu'ils ont la même image (i.e. $f(x) = f(y)$).
   Puis montrer que la seule possibilité est que $x = y$.

Exercice 11.1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}, \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}, \quad h : \begin{array}{l} D_{\tan} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{array}, \quad k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}, \quad j : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+2 \end{array}.$$

Remarque 11.2.

- Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, il suffit de trouver x et $y \in E$, $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$.
- Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, il suffit de trouver $y \in F$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \neq y$.

Remarque 11.3.

- Une fonction f est toujours surjective de E dans l'image directe $f(E)$ par définition.
- On peut rendre une fonction injective en restreignant son domaine de définition. Par exemple, les fonctions carrées et cosinus.

11.3 Composition, bijection, application réciproque

11.3.1 Composition

Définition 11.5. Soit E, F et G trois ensembles et soit f une application de E dans F et soit g une application de F dans G.

On définit alors l'application composée de f par g, notée $g\circ f$ comme l'application qui à $x\in E$ associe $g(f(x))$:

$$g\circ f:\quad \begin{array}{l} E\longrightarrow G\\ x\longmapsto g(f(x))\end{array}$$

Exemple 11.4.

1. Soit
$$f:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto x^2\end{array}\qquad g:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto 2x-3\end{array}$$
Alors
$$g\circ f:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto 2x^2-3\end{array}$$

2. Soit
$$f:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+\star}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto \ln x\end{array}\qquad g:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^{+\star}\\ x\longmapsto x^2+1\end{array}$$
Alors
$$g\circ f:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+\star}\longrightarrow \mathbb{R}^{+\star}\\ x\longmapsto \ln^2(x)+1\end{array}\quad \text{et}\quad f\circ g:\quad \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto \ln(x^2+1)\end{array}$$

Remarque 11.4.

- Il faut prêter une grande attention aux ensembles de départ et d'arrivée de f et g.
- Soit f une application de E dans F. Alors
$$f\circ Id_E=f\qquad Id_F\circ f=f$$

Propriété 11.3. *L'opération de composition est associative et non-commutative, c'est-à-dire, si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors*

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

Par contre, si a est une application de E dans F et b est une application de F dans E, alors en général $a\circ b$ et $b\circ a$ sont deux applications différentes.

Exemple 11.5. Par exemple $a:\ \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto x^2\end{array}$ et $b:\ \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto 2x+1\end{array}$ vérifient

$$a\circ b: \qquad\qquad \text{et}\quad b\circ a:$$

donc $a\circ b\neq b\circ a$.

Propriété 11.4. *Soit $f:E\to F$ e $g:F\to G$.*

- *(La composée de deux fonctions injective est injective) Si f et g sont injectives alors $g\circ f$ est injective.*
- *(La composée de deux fonctions surjectives est surjective) Si f et g sont surjectives alors $g\circ f$ est surjective.*

Démonstration. Au tableau. □

11.3.2 Bijections

Définition 11.6

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
On dit que f est une bijection ou est bijective de E dans F si f est à la fois injective et surjective de E dans F.

Remarque 11.5. Ainsi $f : E \to F$ est bijective si, et seulement si, tout élément de y de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent par E, si et seulement si

$$\forall\, y \in F,\ \exists !\, x \in E \ /\ f(x) = y.$$

Exemple 11.6. Les fonctions

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x-1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+\star} \\ x \longmapsto e^x \end{array}$$

sont bijectives.

Théorème 11.1

Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F.$$

L'application g est unique, et est bijective.
On dit que g est la bijection réciproque de f, et on la note f^{-1}.

Démonstration. Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Montrons d'abord que si f admet une bijection réciproque alors elle est injective et surjective. On suppose donc ici que $f$admet une bijection réciproque f^{-1}.

Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y))$, c'est-à-dire $x = y$. f est donc bien injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $z \in F$, alors $z = f \circ f^{-1}(z)$, c'est-à-dire $z = f(f^{-1}(z))$. Notons $u = f^{-1}(z)$, on a donc $f(u) = z$, z admet bien un antécédent par f. f est ainsi bien surjective.

On a donc montré que si f admet une bijection réciproque alors elle est injective et surjective.

Montrons maintenant que si f est injective et surjective alors elle admet une bijection réciproque. On suppose donc ici que f est injective et surjective.

Soit $y \in F$, y admet alors exactement un antécédent par f, on va alors définir l'application g qui à tout élément y de F associe son unique antécédent par f.

Par construction on a alors, pour tout $y \in F$, $f(g(y)) = y$.

Soit maintenant $x \in E$ alors $f(x)$ admet x comme antécédent par f, puisque chaque élément admet un seul antécédent par f on a alors $g(f(x)) = x$

Ainsi

$$f \circ g = Id_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = Id_E$$

f est donc bien bijective. □

Remarque 11.6. Il ne suffit pas de montrer l'une des deux égalités pour trouver la bijection réciproque de f, il faut absolument montrer les deux égalités, en effet il existe des applications f et g non bijectives telles que $g \circ f = Id_E$ mais $f \circ g \neq Id_F$ (cf exercice 2 du TD).

Remarque 11.7. Si $f : E \to F$ est bijective, alors

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Illustration sur un diagramme en patate.

Démonstration. Supposons qu'il existe g et h telle que

$$g \circ f = Id_E \qquad f \circ g = Id_F \qquad \text{et} \qquad h \circ f = Id_E \qquad f \circ h = Id_F,$$

autrement dit

$$\forall\, x \in E, g(f(x)) = x \qquad h(f(x)) = x \qquad \text{et } \forall\, y \in F, f(g(y)) = y \qquad f(h(y)) = y,$$

Montrons que $g = h$. Soit $y \in F$. On a $f(g(y)) = y$, en appliquant la fonction h, il vient $h(f(g(y))) = h(y)$. Or $h(f(g(y))) = g(y)$. Finalement $g(y) = h(y)$ et il s'en suit que $g = h$. □

Exemple 11.7.

1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ est une bijection d'inverse $f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$.
2. $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ x \longmapsto \exp x \end{array}$ est une bijection d'inverse $g^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array}$.
3. La fonction inverse $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\star} \longrightarrow \mathbb{R}^{\star} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une bijection d'inverse h.
4. La fonction tangente tan : $\begin{array}{l}]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{array}$ est une bijection d'inverse arctan.

Remarque 11.8. Bilan pour une fonction $f : I \to J$ de la variable réelle :

— f est injective si pour tout $a \in J$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe au plus une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction inverse).

— f est surjective si pour tout $a \in J$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe au moins une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction carrée).

— f est bijective si pour tout $a \in J$, la droite verticale d'équation $y = a$ coupe exactement une fois la courbe représentative de f (exemple de la fonction exponentielle).

Propriété 11.5. *Soit f une bijection de E dans F de réciproque f^{-1}. Alors f^{-1} est une bijection de réciproque f. Autrement dit $(f^{-1})^{-1} = f$. On dit que l'inversion de fonctions est involutive.*

Démonstration. On a bien

$$f \circ f^{-1} = Id_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = Id_E$$

D'où f^{-1} est une bijection de réciproque f. □

Propriété 11.6. *Soit une bijection de E dans F de réciproque f^{-1} et soit g une bijection de F dans G de réciproque g^{-1}. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G de réciproque*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration. Il suffit de le vérifier :

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= Id_E\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= g \circ Id_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= Id_G\end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est bien une bijection de E dans G de réciproque

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

□

Remarque 11.9. On sait que f et g sont injectives et surjectives, donc $g \circ f$ est injective et surjective, donc bijective, d'après la propriété sur la composée des applications injectives et surjectives.

Théorème 11.2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et strictement monotone sur I. Notons $J = f(I)$. Alors f est bijective de I dans J.

Démonstration. On sait qu'une fonction strictement monotone sur I est injective, et que toute fonction f définie sur un ensemble E est surjective dans l'ensemble image $f(E)$. Finalement f est bijective de I dans $f(I)$. □

11.4 Le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection continue

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier de fonctions continues (voir le chapitre sur la continuité) de la variable réelle.

On rappelle le théorème des valeurs intermédiaires, que nous admettons pour le moment :

Théorème 11.3: Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $a \leq b$ deux nombres réels. Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, l'image directe $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 11.10. Attention, on peut avoir $f(a) > f(b)$ (par exemple si f est décroissante sur I).

En couplant le théorème 11.2 et le théorème 11.4, on obtient le théorème de la bijection continue :

Théorème 11.4: Théorème de la bijection continue

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et strictement monotone sur I. Notons $J = f(I)$ l'image directe de I par f. Alors

- J est un intervalle de I.
- f est bijective de I dans J.
- La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Exemple 11.8.
- La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$.
- Pour tout $y \in [0,2]$, il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $y = x^3 + x$.

Méthode 11.3: Prouver qu'une fonction f est bijective

Plusieurs méthodes :

1. Montrer que f admet une fonction réciproque : si il existe une fonction $g : F \to E$ telle que
$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E$$
alors f est bijective de E dans F (et g également).
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g, cela revient à montrer que
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y).$$
3. Utiliser le théorème de la bijection continue.
4. Montrer que f est injective et surjective (quand on n'a pas d'autres solutions).

Exemple 11.9.
1. Fonction exponentielle et logarithme.
2. Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est bijective.
3. La fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+2}{x-4} \end{array}$ est bijective.

Propriété 11.7. *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit f une bijection de I dans J d'inverse f^{-1}. Alors le graphe de f et le graphe de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.*

Remarque 11.11. Graphe des fonctions exponentielle et logarithme, des fonctions carrée et racine.

Remarque 11.12. Tableau des bijections usuelles et de leurs réciproques : (présenter $f : I \to J$, avec I ensemble de départ, J ensemble d'arrivée, $f^{-1} : J \to I$).

- exp et ln
- Fonctions carrée et racine
- Fonction puissance
- Fonction inverse
- Fonction trigonométriques (cosinus, sinus, tangente).