TD$_{11}$ Applications

1 Antécédents, images, injections, surjections

Exercice 1 (○○○)
Dans cet exercice, on cherche à déterminer graphiquement des images et des antécédents d'éléments par une fonction.

1. On donne le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur la figure 1. Déterminer graphiquement :
   - L'image de 0 par f,
   - Les antécédents de 0 par f,
   - L'image de -1 par f,
   - Les antécédents de -1 par f,
   - Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 4$,
   - Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) > 2$,
   - Les antécédents de -1 par f.

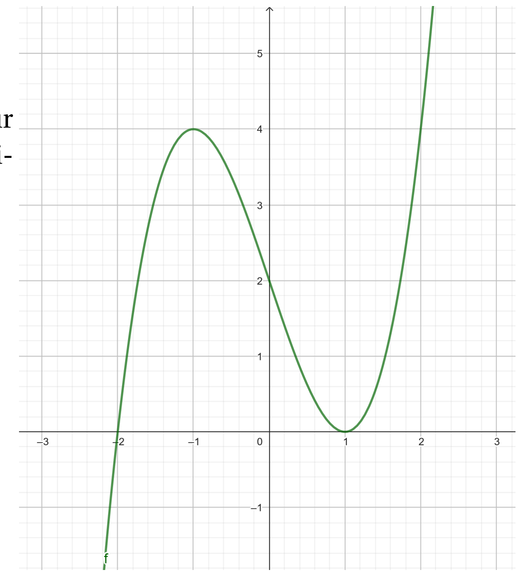

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

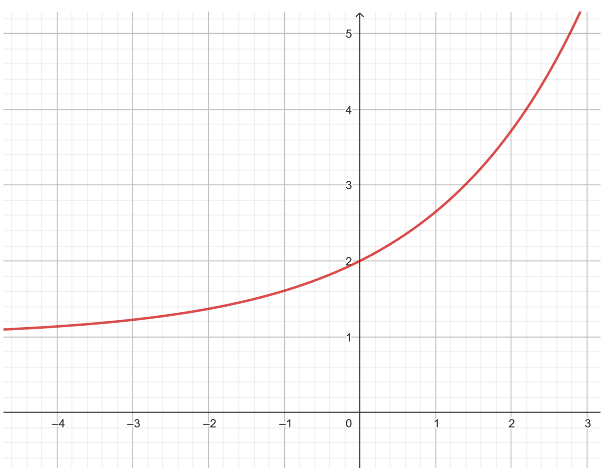

FIGURE 2 – Courbe représentative de g

2. On donne le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \exp(x/2)$ sur la figure 2. Déterminer graphiquement :
   - $f([0,2])$
   - $f(]-\infty, 0[)$

Exercice 2 (•○○)
On considère les fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n+1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
3. Les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 3 (• • ∘)
Si A est une partie d'un ensemble E, on définit l'indicatrice de A comme la fonction

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{l} E \longrightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Représenter le graphe de l'indicatrice $\mathbf{1}_{[-1,1]}$, de $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$, de $\mathbf{1}_{]0,2]\cup[3,5]}$.
2. Si A et B sont deux parties de E, montrer les égalités
   (a) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
   (*Indication : pour montrer que deux fonctions f et g sont égales, on montre que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*)

2 Bijections

Exercice 4 (• • ∘)
Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie (c'est-à-dire f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$).
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 5 (• ∘ ∘)
Soit la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 1$, résoudre l'équation $g(x) = y$.
3. En déduire que g est bijective sur des ensembles à préciser, et exprimer sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 6 (• • ∘)
Montrer que la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ est bijective sur des ensembles à préciser et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 7 (• • ∘)
Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f.
3. f est-elle injective sur son domaine de définition ? Pourquoi ?
4. Préciser un intervalle le plus grand possible sur lequel f est injective.
5. (a) Donner l'allure graphique de f.
   (b) Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R})$.

6. Donner deux intervalles I et J tels que f réalise une bijection de I dans J.
7. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de J dans I.

Exercice 8 (• • ◦)
Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les variations de f.
4. Donner l'allure graphique de f.
5. Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R})$.
6. Donner deux intervalles I et J tels que f réalise une bijection de I dans J.
7. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de J dans I.

Exercice 9 (• • ◦)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

1. Déterminer l'image de $(2, 1)$ et les antécédents de $(1, 0)$ par f.
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 10 (• • ◦)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y + z).$$

1. Déterminer les antécédents de $(3, 0, 0)$ par f.
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 11 (• • •Sinus hyperbolique)
On étudie la fonction sinus hyperbolique définie par

$$\sinh : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

Le sinus hyperbolique est parfois aussi noté sh. On peut faire le lien entre cette formule et la seconde formule d'Euler donnant l'expression du sinus.

1. Etudier les variations de sinh sur $\mathbb{R}$ (penser à étudier une parité éventuelle).
2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}$.
   (a) Montrer que f est bien définie.
   (b) Calculer $\sinh \circ f$ et $f \circ \sinh$.
   (c) Conclure.