DS5 – Mathématiques

Mercredi 22 Janvier 2025

Durée : 2 heures

- **Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.**
- Le devoir comporte trois exercices de mathématiques et un exercice d'informatique.
- **Utilisez des feuilles doubles uniquement.** **Rédigez l'exercice d'informatique sur une copie double séparée.**
- La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1 (Informatique)**.**

1. Écrire une fonction `recherche` qui prend en argument une liste L et un nombre a et qui renvoie l'indice de la première occurrence du nombre a dans la liste L. Si le nombre n'est pas présent dans la liste, la fonction renvoie le nombre -1.

   Par exemple, `recherche([3, 1, 4, 5, 4, 4], 4)` doit renvoyer 2, tandis que `recherche([3, 1, 4, 5, 4, 4], 6)` doit renvoyer -1.
2. Écrire une fonction `ind_min` qui prend en argument une liste L et qui renvoie l'indice du plus petit élément de L.

   Par exemple, `ind_min([3, 4, 1, 5])` doit renvoyer 2.
3. On donne la fonction suivante :

```python
def mystere(L):
    for k in range(len(L)):
        x = L[k]
        if x < 0:
            L[k] = -x
    return L
```

   Que renvoie l'instruction `mystere([-1, -2, 3, 0, -5]` ? De manière générale, que renvoie l'instruction `mystere(L)` ?

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Montrer que la fonction f est impaire (on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$).
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +1.$$
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans J où J est un intervalle que l'on précisera.
5. Déterminer la bijection réciproque $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ de f.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(T_m) \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + my + 4z = 6 \\ x + 2y + (m+2)z = 6. \end{cases}$$

1. Résoudre le système (T_0).
2. On se place dans le cas général. Donner le rang et l'ensemble des solutions de (T_m) en fonction du paramètre m.

Exercice 4 (Une fonction pas vraiment périodique)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sin(x)^2.$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq f(x) \leq 1 + x$.
   (b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x + \pi) = f(x) + \pi.$$
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Expliquer comment obtenir la courbe C_f de f sur $\mathbb{R}$ à partir de la portion de courbe de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
5. En quels points C_f possède-t-elle des tangentes horizontales ? (on cherchera l'abscisse de ces points).
6. Tracer C_f.