Chapitre 13

Suites réelles

Sommaire

13.1 Vocabulaire

13.1.1 Propriétés générales

On rappelle qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (encore notée $(u_n)_n$ ou (u_n)) est la donnée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ d'un réel u_n. Formellement, c'est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 13.1: Suite majorée, suite minorée, suite bornée

On dit que (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

On dit que (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite :

$$\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

On dit que (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Propriété 13.1. *Une suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M.$$

Exemple 13.1.

- La suite $u_n = n$ est …...
- La suite $v_n = -n$ …
- La suite $w_n = (-1)^n n$ …
- La suite $x_n = \cos(n)$ …

Propriété 13.2. *La somme et le produit de deux suites bornées sont des suites bornées. Autrement dit si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées, alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.*

Démonstration. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites bornées. Notons $w = u + v$ et $z = uv$ les suites somme et produit et montrons que w et z sont bornées. Comme u et v sont bornées, il existe M_1 et $M_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n| \leq M_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq |v_n| \leq M_2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors $|w_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_1 + M_2$ et $|z_n| \leq M_1 M_2$. On en déduit que w et z sont bornées. □

Attention 13.1. Le produit de deux suites majorées n'est pas nécessairement une suite majorée. Prendre par exemple $u_n = v_n = -n$.

Définition 13.2: Suite croissante, suite décroissante, suite monotone

On dit que (u_n) est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}.$$

On dit que (u_n) est *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}.$$

On dit que (u_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 13.1.

- La suite (u_n) est croissante ssi

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \leq n) \implies (u_m \leq u_n).$$

- Une suite qui est à la fois croissante et décroissante est constante.
- Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut suivant les cas étudier la différence $u_{n+1} - u_n$ et la comparer à 0 ou le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

Exemple 13.2.

- La suite (n^2) est croissante.
- La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est décroissante.

Définition 13.3 (Suite extraite)**.** La suite extraite de (u_n) des termes d'indice pair est la suite (u_{2n}). Celle des termes d'indice impair est la suite (u_{2n+1}).

Exemple 13.3.

13.1.2 Limites

Définition 13.4: Limite finie

Soit l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) a pour limite l ou encore que (u_n) converge vers l, noté $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Remarque 13.2. La définition énonce qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont proches de l, la proximité étant quantifiée par le réel ε. Bien sûr, le rang à partir duquel cette propriété est satisfaite dépend du ε ; l'ordre des quantificateurs est important !

Remarque 13.3. Dans certains cas, il est important de savoir qu'une suite (u_n) tend vers l, tout en étant supérieure à l (à partir d'un certain rang). On dit alors qu'elle tend vers l^+.

Définition analogue pour (u_n) tendant vers l^-.

Définition 13.5: Limite infinie

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si

Remarque 13.4. La définition énonce qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont au-dessus d'un plancher A, préalablement défini.

Propriété 13.3 (Unicité de la limite)**.** *Une suite (u_n) a au plus une limite (finie ou infinie).*

Démonstration. Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers deux limites différentes, notée l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$. Notons $d = l_2 - l_1 > 0$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - l_1| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N_2,\ |u_n - l_2| \leq \varepsilon$$

En choisissant dans les deux cas $\varepsilon = \frac{d}{3}$, on obtient qu'il existe un rang N_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]l_1 - \frac{d}{3}, l_1 + \frac{d}{3}[$:

$$\forall\, n \geq N_1,\ u_n \in \left] l_1 - \frac{d}{3}, l_1 + \frac{d}{3} \right[$$

et un rang N_2 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]l_2 - \frac{d}{3}, l_2 + \frac{d}{3}[$:

$$\forall\, n \geq N_2,\ u_n \in \left] l_2 - \frac{d}{3}, l_2 + \frac{d}{3} \right[.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi pour tout $n \geq N$, on a à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc

$$u_n \in \left] l_1 - \frac{d}{3}, l_1 + \frac{d}{3} \right[\bigcap \left] l_2 - \frac{d}{3}, l_2 + \frac{d}{3} \right[.$$

Mais

$$\left] l_1 - \frac{d}{3}, l_1 + \frac{d}{3} \right[\bigcap \left] l_2 - \frac{d}{3}, l_2 + \frac{d}{3} \right[= \emptyset$$

car $l_2 = l_1 + d$ donc $l_2 - d/3 - (l_1 - d/3) = d/3 > 0$. □

Notation 13.1. On écrit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

(ou $\pm\infty$) ou simplement

$$u_n \underset{n \to \infty}{\to} l$$

pour donner la valeur de la limite de (u_n). Attention, cette écriture ne peut être employée que quand on sait déjà que la suite (u_n) a une limite.

Définition 13.6: Suite convergente

On dit que (u_n) *converge* si elle a une limite finie. On dit que (u_n) *diverge* sinon.

Attention 13.2. La notion de divergence regroupe donc différentes possibilités. Une suite divergente peut

- tendre vers $+\infty$, p. ex. $u_n = n$;
- tendre vers $-\infty$, p. ex. $u_n = -n$;
- n'avoir aucune limite, p. ex. $u_n = (-1)^n$ (voir plus bas).

Propriété 13.4

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 13.5. La réciproque est fausse !

Théorème 13.1 (Limite des suites extraites)
La suite (u_n) tend vers l (finie ou infinie) si, et seulement si, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l.

Exemple 13.4. La suite (u_n) donnée par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. En effet, la suite (u_{2n}) est constante égale à 1, donc converge vers 1, tandis que la suite (u_{2n+1}) est constante égale à -1, donc converge vers -1.

13.2 Révisions sur les limites

13.2.1 Opérations élémentaires

On rappelle que les opérations $+, -, \times, /$ peuvent être étendues aux valeurs $\pm\infty$, sauf dans certains cas particulier appelées formes indéterminées :

- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\infty \times 0$
- ∞ / ∞
- $0/0$

sont toutes des formes indéterminées.

On fera bien attention au signe pour étendre les opérations usuelles aux infinis. Par exemple, $1/0^+ = +\infty$ et $1/0^- = -\infty$. En particulier, si on sait seulement qu'une suite (u_n) tend vers 0, on ne peut rien dire *a priori* de la suite $(1/u_n)$.

Avec ces conventions, on peut énoncer le principe général d'opérations sur les limites.

Propriété 13.5. *Si deux suites (u_n) et (v_n) ont une limite (finie ou infinie), alors la somme/la différence/le produit/le quotient de (u_n) et (v_n) tend vers la somme/la différence/le produit/le quotient des limites, si cette opération n'est pas une forme indéterminée.*

Concrètement, cela nous donne les opérations suivantes sur les limites

Propriété 13.6: Opérations sur les limites

Soient l_1, l_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Limite éventuelle de la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	l_2	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
	$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

- Limite éventuelle du produit par un scalaire $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
Signe de λ	$\lambda > 0$	λl_1	$+\infty$	$-\infty$
	$\lambda = 0$	0	0	0
	$\lambda < 0$	λl_1	$-\infty$	$+\infty$

- Limite éventuelle du produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

		Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$				
		$l_1<0$	$l_1 = 0$	$l_1 > 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	$l_2 > 0$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_2 = 0$	0	0	0	F.I	F.I
	$l_2 < 0$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Limite éventuelle du quotient $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$					
$l_1 \neq 0$	0^+	0^-	0	$+\infty$	$-\infty$
$\dfrac{1}{l_1}$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	0^+	0^-

Exemple 13.5. Étudier la limite éventuelle des suites définies par les relations suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2-n}{3+n^2}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{2n^2-5}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2-n^2}{3+n^2}$

13.2.2 Composition de limites

On suppose connues les notions de limite et de continuité pour une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 13.2 (Composition de limites)
On suppose qu'une suite (u_n) tend vers une limite l (finie ou infinie) et que la limite de f en l existe et est égale à a (fini ou infini).

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a.$$

Corollaire 13.1 (Cas particulier)**.** *Si* $\lim_n u_n = l \in \mathbb{R}$ *et si* f *est continue en* l*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l).$$

Exemple 13.6. Déterminer la limite des suites suivantes

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{3n+7}$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$.

13.2.3 Limites et inégalités

Théorème 13.3: Passage à la limite et inégalité

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 0.$$

On suppose que (u_n) est convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$l \geq 0.$$

Corollaire 13.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limite respective l et l'. On suppose que pour tout n, $u_n \geq v_n$. Alors $l \geq l'$.*

Démonstration. □

Attention 13.3. Si on a une inégalité stricte $u_n > v_n$, on ne garde que l'inégalité large en passant à la limite.

Penser par exemple à $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n}$, de limite commune 1.

On fera bien attention au fait que, dans ce théorème et son corollaire, on *suppose* l'existence des limites. La situation est très différente dans le théorème suivant, qui *prouve* la convergence d'une suite.

Théorème 13.4: Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n.$$

On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers l. Alors (v_n) converge vers l.

On a un résultat analogue avec des limites infinies.

Propriété 13.7: Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.
- Si (v_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple 13.7. Étudier la convergence des suites données par

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + n + 2$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \cos(n) - 2n^2$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{\sin(n) + n^2}{n+1}$.

On dispose également du résultat suivant, très utile en pratique.

Propriété 13.8. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $0 \in \mathbb{R}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. □

Exemple 13.8. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

13.2.4 Théorème de la limite monotone

On effectue de rapides rappels sur les notions de borne inférieure et supérieure (voir le chapitre sur les nombres réels).

Définition 13.7. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Le plus petit majorant de A est la *borne supérieure* de A.

Exemple 13.9.
- $A = [0,1]$ a pour borne supérieure 1 ; c'est un élément de A.
- $A = [0,1[$ a pour borne supérieure 1 ; ce n'est pas un élément de A.
- $A = \{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots\}$ a pour borne supérieure 2 ; ce n'est pas un élément de A.
- $A = \mathbb{N}$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$; elle n'a pas de borne supérieure.

Ainsi, on voit apparaître une distinction importante parmi les parties majorées de $\mathbb{R}$: celles qui ont un plus grand élément (dans ce cas, c'est la borne supérieure) et celles qui n'ont pas de plus grand élément (mais qui ont quand même une borne supérieure).

On peut de même définir la notion de *borne inférieure*, pour une partie minorée.

Théorème 13.5: Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente (et sa limite vaut $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente (et sa limite vaut $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

Attention 13.4. Ce n'est pas parce qu'une suite croissante est majorée par 2 qu'elle converge vers 2. Le théorème affirme seulement qu'elle converge et que sa limite est inférieure ou égale à 2.

Corollaire 13.3 (Alternative pour les suites monotones)**.**
- *Une suite croissante converge ou diverge vers $+\infty$.*
- *Une suite décroissante converge ou diverge vers $-\infty$.*

Attention 13.5. Une suite non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$, par exemple la suite

$$((-1)^n + 1)n)_{n\in\mathbb{N}}$$

n'est pas majorée mais ne tend pourtant pas vers $+\infty$.

13.3 Suites adjacentes

Définition 13.8. Deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si une des deux suites est croissante, l'autre décroissante et si la différence $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Exemple 13.10. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Théorème 13.6: Suites adjacentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ et de plus

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n.$$

Exemple 13.11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

13.4 Comparaisons asymptotiques

13.4.1 Théorèmes de croissance comparée

On s'intéresse au comportement relatif des suites de termes généraux $n!$, n^α (pour $\alpha > 0$) et a^n (pour $a > 1$). Ces trois suites tendent vers $+\infty$; on va montrer qu'elles n'y tendent pas à la même vitesse.

Propriété 13.9: Comparaison de $n!$ et a^n

Soit $a > 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

Remarque 13.6. La proposition est encore vraie si $a \geq 0$ mais, pour $a \in]0,1[$, il n'y a pas de forme indéterminée. En effet, si $a \in]0,1[$ alors

Démonstration. Considérons un entier n_0 tel que $n_0 \geq 2a$ (par exemple $n_0 = \lfloor 2a \rfloor + 1$). Soit $n \geq n_0$. On réécrit :

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n} a} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{a} = \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{k}{a} \times \prod_{k=n_0}^{n} \frac{k}{a}.$$

On note P le produit $\prod_{k=1}^{n_0-1} \dfrac{k}{a}$. C'est un réel strictement positif (indépendant de n).

Si $k \geq n_0$, on a $\dfrac{k}{a} \geq 2$. Donc $\prod_{k=n_0}^{n} \dfrac{k}{a} \geq 2^{n-n_0+1}$. Ainsi,

$$\forall\, n \geq n_0 : \frac{n!}{a^n} \geq P \times 2^{n-n_0+1} = \frac{P}{2^{n_0-1}} \times 2^n.$$

Comme la suite de droite tend vers $+\infty$, $\dfrac{n!}{a^n}$ aussi. □

Propriété 13.10: Comparaison de a^n et n^α

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Démonstration. Notons $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \times \frac{n^\alpha}{a^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^\alpha = a\Big(\frac{1}{1+1/n}\Big)^\alpha.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 donc par opérations élémentaires et composition, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers a.

Comme $a > 1$, on peut trouver un réel b tel que $1 < b < a$ (par exemple $b = \dfrac{1+a}{2}$). Par définition de ce qu'est une limite, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geq N : \Big|\frac{u_{n+1}}{u_n} - a\Big| < a - b.$$

Pour un tel n, on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - a \geq b - a$, d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq b$. Si $n \geq N$, on peut écrire

$$u_n = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \text{ (produit téléscopique)}$$

D'où, $\forall\, n \geq N : u_n \geq u_N \times b^{n-N} = \dfrac{u_N}{b^N} \times b^n$. Le terme de droite tend vers $+\infty$ (car $b > 1$), donc celui de gauche aussi. On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Propriété 13.11 (Autres comparaisons)**.** *Soient $\alpha > 0$ et $b > 0$. On a :*

- *Le quotient $\dfrac{n!}{n^\alpha}$ tend vers $+\infty$.*
- *Le quotient $\dfrac{n^\alpha}{(\ln n)^b}$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration.

- Pour le premier quotient, on peut écrire

$$\frac{n!}{n^\alpha} = \frac{n!}{2^n} \times \frac{2^n}{n^\alpha}.$$

D'après les deux propositions précédentes, les deux termes de droite tendent vers $+\infty$, donc celui de gauche aussi.

- On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{\alpha})^n}{n^b} = +\infty.$$
(On a bien $e^{\alpha} > 1$ car $\alpha > 0$.) Comme $\lim_n \ln n = +\infty$, on obtient par composition de limites
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(e^{\alpha})^{\ln n}}{(\ln n)^b} = +\infty,$$
ce qui conclut puisque $n^{\alpha} = e^{\alpha \ln n} = (e^{\alpha})^{\ln n}$.

□

Exemple 13.12. Étudier la limite lorsque $n \to +\infty$ des quantités suivantes :

1. $\dfrac{n!}{2^n}$
2. $\dfrac{3^n}{n^2}$
3. $\dfrac{\ln n}{n}$
4. $\dfrac{e^n}{n}$
5. $\dfrac{n!}{n^1 000}$
6. $\dfrac{n}{(\ln n)^6}$

13.4.2 Équivalents

On suppose que toutes les suites considérées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Définition 13.9: Suites équivalentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* et on écrit $u_n \sim v_n$ si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Exemple 13.13. On a les équivalents suivants :

1. $n^2 + n - \dfrac{3}{n} \sim n^2$.

2. $\dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2} \sim \dfrac{3}{n}$.

Remarque 13.7. La notion d'équivalent permet en quelque sorte d'isoler la partie prédominante lorsque $n \to \infty$ dans le terme général d'une suite.

Propriété 13.12. *La notion d'équivalence sur les suites a les propriétés suivantes : (on considère (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites)*

- *réflexivité : $u_n \sim u_n$;*
- *symétrie : si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$;*
- *transitivité : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Pour les suites ayant une limite, la notion d'équivalent est intéressante quand cette limite est nulle ou infinie.

Propriété 13.13. *Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \sim l$ ssi u_n converge vers l.*
*(*à droite, on parle de la suite constante égale à l*)*

Attention 13.6. Une suite n'est jamais équivalente à la suite nulle. Ni au symbole infini (on ne dit pas que u_n est équivalente à $+\infty$ mais qu'elle tend vers $+\infty$).

Propriété 13.14. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors*

- *u_n tend vers une limite (finie ou infinie) ssi v_n tend vers la même limite.*
- *A partir d'un certain rang, (u_n) et (v_n) ont le même signe.*

La notion d'équivalence des suites se comporte bien par multiplication/division/puissances.

Propriété 13.15. *Soient (u_n), (u'_n), (v_n) et (v'_n) quatre suites telles que $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

- $u_n v_n \sim u'_n v'_n$
- $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u'_n}{v'_n}$
- $u_n^\alpha \sim {u'_n}^\alpha$.

Attention 13.7. L'équivalence des suites ne fonctionne pas bien avec l'addition (ou la soustraction), ni avec la composition :

- $n^2 + n \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais on n'a pas $n \sim 0$.
- $n+1 \sim n$ mais on n'a pas $e^n \sim e^{n+1}$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n}$ est la suite constante égale à e.

On dispose de deux méthodes principales pour obtenir des équivalents.

Propriété 13.16. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers $+\infty$, alors $u_n + v_n \sim u_n$.*

Exemple 13.14.

- D'après les théorèmes de croissance comparée, on a ainsi $n^\alpha + a^n \sim a^n$ pour tous $a > 1$ et $\alpha > 0$.
- Soit $P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_0$ une suite polynomiale, avec $a_0, \ldots, a_d$ des constantes réelles et $a_d \neq 0$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$. On en déduit notamment que $P(n)$ est du signe de a_d quand n est assez grand.

Théorème 13.7 (Équivalents donnés par la dérivée)
Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I contenant $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$.
Alors $f(a+u_n) - f(a) \sim f'(a) u_n$.

Démonstration. Par définition de la dérivée, on a

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = f'(a).$$

Comme u_n tend vers 0, on en déduit par composition de limites que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(a+u_n) - f(a)}{u_n} \right) = f'(a).$$

On a donc $\left(\dfrac{f(a+u_n) - f(a)}{u_n} \right) \sim f'(a)$, puis $f(a+u_n) - f(a) \sim f'(a) u_n$, en multipliant par u_n. □

Propriété 13.17 (Équivalents usuels)**.** *On en déduit les équivalents suivants, avec* (u_n) *une suite tendant vers* 0 *:*

- $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$ *;*
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ *;*
- $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$ *;*
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ *;*
- $\sin u_n \sim u_n$ *(approximation des petits angles) ;*
- $\tan u_n \sim u_n$.

On a aussi $\cos u_n - 1 \sim -\frac{1}{2} u_n^2$.

Démonstration. La liste d'équivalents est obtenue par application directe du théorème. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable en 1 et sa dérivée en 1 vaut α. Donc $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Pour $\cos u_n$, il faut ruser car la dérivée de cos s'annule en 0. On remarque que

$$\cos u_n - 1 = \cos(2\frac{u_n}{2}) - 1 = -2\sin^2(\frac{u_n}{2}).$$

Comme $u_n/2$ tend vers 0, on peut appliquer le théorème et obtenir $\sin(u_n/2) \sim u_n/2$. Par passage au carré, on a donc $\sin^2(u_n/2) \sim u_n^2/4$. D'où

$$\cos u_n - 1 = -2\sin^2(\frac{u_n}{2}) \sim -2\frac{u_n^2}{4} = -\frac{u_n^2}{2}.$$

□