

TD₁₃ Suites réelles

1 Étude de la monotonie

Exercice 1 (•••)

Étudier la monotonie des suites (u_n) définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - n - 4.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^n (2n)!.$
3. $u_0 = 1,$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$
4. $u_0 = 3,$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \sqrt{1 + u_n^2}.$
5. $u_0 = 2,$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}.$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$

2 Calcul de limite

Exercice 2 (•••)

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 4}$ $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + n + 1}$ $x_n = \ln(n+1) - \ln n$ $y_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}.$
2. $u_n = \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ $v_n = \frac{2^n}{n^2} + \cos(n!e^n)$ $w_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$ $x_n = \sqrt[n]{n^2}$ $y_n = \frac{n + \sin(2n)}{n - \ln(n^2)}$
3. $z_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n}.$
4. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{\cos x_n}{\sqrt[n]{n+1}}$
5. $u_n = \frac{n + \ln n + 1}{n + e^n + e^{-n}}, u_n = 3^n - 2^{2n}, w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}.$
6. $u_n = n^2 \ln(1 + e^{-n}).$
7. $u_n = \frac{\ln(n^4 + 1)}{n^2 + n + 1}, u_n = n^3 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$

Exercice 3 (•••)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que la suite $\frac{u_n}{n}$ converge vers 0.

Exercice 4 (•••)

Étudier les suites (définition, monotonie, convergence) dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$

Exercice 5 (••• Vrai-faux)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Si elles sont vraies, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.

2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) tend vers $+\infty$.

3 Théorème de convergence monotone

Exercice 6 (•◦◦)

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ pour tout entier n .

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 7 (•◦◦)

Considérons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = v_n \frac{1+2v_n}{1+3v_n}$ pour tout entier n .

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8 (••◦)

Soit la suite u définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier $n, u_n > 0$, en et déduire la monotonie de (u_n) .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 (••◦)

Soit la suite u définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que la suite est bien définie et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 10 (••• La somme harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire sur la nature convergente ou divergente de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 11 (••◦)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + x^2$ et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

4 Utilisation des équivalents

Exercice 12 (•••)

Quels sont les équivalents corrects parmi les suivants?

1. $n \sim n + 1$

3. $\ln(n) \sim \ln(10^6 n)$

2. $n^2 \sim n + n^2$

4. $e^n \sim e^{n+10^{-6}}$

Exercice 13 (•••)

Donner un équivalent le plus simple possible des suites suivantes.

1. $\frac{n^3 - 2n + 5}{n^2 + 1}$,

4. $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,

2. $1 + 2 + \dots + n$,

5. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

3. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$,

6. $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$.

5 Sous-suites

Exercice 14 (•••)

En étudiant les suites extraites d'indices pairs et impairs, étudier la convergence de suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

6 Suites adjacentes

Exercice 15 (•••)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique. Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Déterminer leur limite commune, en considérant l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

Exercice 16 (••• Moyenne arithmético-géométrique)

On considère deux nombres réels $a > 0$ et $b > 0$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ ainsi que par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x et $y > 0$, on a

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

2. En déduire que $\forall n \geq 1, u_n \geq v_n$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante, et que (v_n) est croissante.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ puis montrer que $(u_n v_n) \rightarrow 0$.
5. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On appelle leur limite commune la moyenne arithmético-géométrique de a et de b .