Fiche de calcul n° 1 038A

Calcul de limites (1). Suites et fonctions.

Prérequis
Suites et fonctions usuelles.
Propriétés des limites avec les opérations.
Théorème de comparaison. Théorème des gendarmes.

Avant la première année.

Calcul 1.1

Calculer la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = n^2 - n + 2$ ....

b) $u_n = 4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$ ....

c) $u_n = 2^n - 3^n$ ....

d) $u_n = \frac{2 - n^2}{n^3 + 3}$ ....

e) $u_n = \frac{2 - 2^{-n}}{3^{-n} + 3}$ ....

f) $u_n = -5n^2 + (-1)^n n^2$ ......

Calcul 1.2

Calculer la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{3n^3 - 4}$ ....

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ....

c) $u_n = 2^n - 3^{-n}$ ....

d) $u_n = \frac{4^n + 1}{2 - 3^n}$ ....

e) $u_n = \frac{2 - \frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ....

f) $u_n = \frac{3^n - (-4)^n}{(-5)^n + 1}$ ....

Calcul 1.3

Calculer les limites des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$ quand x tend vers 1^+ ....

b) Limite de $f(x) = \sqrt{x+1} - x$ quand x tend vers $+\infty$ ....

c) Limite de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - x^2}$ quand x tend vers $-\infty$ ....

d) Limite de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}}$ quand x tend vers 1 ....

e) Limite de $f(x) = \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1}$ quand x tend vers $+\infty$. ....

Calcul 1.4

Calculer les limites des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ quand x tend vers -1 ....

b) Limite de $f(x) = x - \sin(x)$ quand x tend vers $-\infty$ ....

c) Limite de $f(x) = \frac{2x + \cos(x)}{x - 2\sin(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

Réponses mélangées

$0 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad -\infty \quad 0 \quad 2 \quad -\infty \quad \frac{2}{3} \quad -\infty$

$-\infty \quad 3 \quad 0 \quad +\infty \quad 0 \quad -\infty \quad -4 \quad -\infty \quad +\infty \quad 4$

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 1. Calcul de limites (1). Suites et fonctions.

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.1 b) .... $\boxed{4}$

1.1 c) .... $\boxed{-\infty}$

1.1 d) .... $\boxed{0}$

1.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

1.1 f) .... $\boxed{-\infty}$

1.2 a) .... $\boxed{0}$

1.2 b) .... $\boxed{0}$

1.2 c) .... $\boxed{+\infty}$

1.2 d) .... $\boxed{-\infty}$

1.2 e) .... $\boxed{0}$

1.2 f) .... $\boxed{0}$

1.3 a) .... $\boxed{-\infty}$

1.3 b) .... $\boxed{-\infty}$

1.3 c) .... $\boxed{-1}$

1.3 d) .... $\boxed{-4}$

1.3 e) .... $\boxed{2}$

1.4 a) .... $\boxed{3}$

1.4 b) .... $\boxed{-\infty}$

1.4 c) .... $\boxed{2}$

Corrigés

1.1 a) $u_n = n^2 - n + 2 = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

1.1 b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$ donc $4 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$

1.1 c) $u_n = 2^n - 3^n = -3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

1.1 d) $u_n = \dfrac{2 - n^2}{n^3 + 3} = -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^3}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.1 e) $u_n = \dfrac{2 - 2^{-n}}{3^{-n} + 3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{-n} = 0$

1.1 f) $u_n = -5n^2 + (-1)^n n^2 = (-5 + (-1)^n)n^2 \leqslant -4n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^2 = -\infty$

1.2 a) $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{3n^3 - 4} = \dfrac{n^2}{3n^3} \times \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{4}{3n^3}\right)} = \dfrac{1}{3n} \times \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{4}{3n^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.2 b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.2 c) $2^n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et $3^{-n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ donc $2^n - 3^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

1.2 d) $u_n = \dfrac{4^n + 1}{2 - 3^n} = -\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \dfrac{1 + 4^{-n}}{1 - 2.3^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

1.2 e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{2}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - \dfrac{1}{2^n} = +\infty$

1.2 f) $u_n = \dfrac{3^n - (-4)^n}{(-5)^n + 1} = -\dfrac{(-4)^n}{(-5)^n} \dfrac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.3 a) $\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim_{x\to 1^+} x-3 = -3\ (<0)$ donc $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

1.3 b) $f(x) = \sqrt{x+1} - x = -x\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0.$

1.3 c) $\dfrac{x^2-1}{x-x^2} = \dfrac{x^2}{-x^2}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = -\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$

1.3 d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} = -\dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} = -(x+1)(\sqrt{x}+1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -4$

1.3 e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} = -\dfrac{x^3+x^2-x^3+x^2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x^2}{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

1.4 a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1 \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 3$

1.4 b) $f(x) \leqslant x+1$ et $x+1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *(Théorème de comparaison)*

1.4 c) $f(x) = \dfrac{2x+\cos(x)}{x-2\sin(x)} = 2\dfrac{1+\frac{\cos(x)}{2x}}{1+\frac{2\sin(x)}{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{2x} = 0.$

(Théorème de comparaison)