Fiche de calcul n° 1 043A

Calcul de limites (2). Suites et fonctions.

Prérequis
Suites et fonctions usuelles. Limites usuelles liées au taux d'accroissement. Limites appelées croissances comparées. Limite d'une composée.

Après le cours de première année.

Calcul 1.1

Calculer la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n^3-4}$ ....

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ....

c) $u_n = n^2\,2^n - 3^n$ ....

d) $u_n = \dfrac{4^n+1}{2-3^n}$ ....

e) $u_n = \dfrac{2-2n^2}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ....

f) $u_n = \dfrac{3^n - n(-4)^n}{(-5)^n+1}$ ....

Calcul 1.2

Calculer la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ ....

b) $u_n = 2^n\sqrt{1-2^{-n}} - 2^n$ .....

c) $u_n = n - n\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ ......

d) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ....

e) $u_n = n^{10} - 2^n$ ....

f) $u_n = 2^n 5^{-\sqrt{n}}$ ....

Calcul 1.3

Calculer les limites des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = \dfrac{x-e^x}{\ln(x)-x}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

b) Limite de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-x^2}$ quand x tend vers 0^+ ....

c) Limite de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

d) Limite de $f(x) = \dfrac{e^x+x^2}{x^2-x+2}$ quand x tend vers $-\infty$ ....

e) Limite de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

f) Limite de $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x + 1$ quand x tend vers $-\infty$ ....

Calcul 1.4

Calculer les limites des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = x - \ln(2x^3)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

b) Limite de $f(x) = x - \ln(x + 2e^x)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

c) Limite de $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0 ....

d) Limite de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ quand x tend vers -1 ....

e) Limite de $f(x) = x - \sin(x)$ quand x tend vers $-\infty$ ....

f) Limite de $f(x) = x\ln(x - 1) - x\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

Réponses mélangées

$+\infty$	0	$-\infty$	1	$-\infty$	2	0	e	1	1	$-\ln(2)$	$-\infty$
$+\infty$	0	0	0	-1	$+\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	3	0

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 1. Calcul de limites (2). Suites et fonctions.

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{0}$

1.1 b) .... $\boxed{0}$

1.1 c) .... $\boxed{-\infty}$

1.1 d) .... $\boxed{-\infty}$

1.1 e) .... $\boxed{0}$

1.1 f) .... $\boxed{0}$

1.2 a) .... $\boxed{2}$

1.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

1.2 c) .... $\boxed{1}$

1.2 d) .... $\boxed{0}$

1.2 e) .... $\boxed{-\infty}$

1.2 f) .... $\boxed{+\infty}$

1.3 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.3 b) .... $\boxed{-\infty}$

1.3 c) .... $\boxed{-\infty}$

1.3 d) .... $\boxed{1}$

1.3 e) .... $\boxed{1}$

1.3 f) .... $\boxed{0}$

1.4 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.4 b) .... $\boxed{-\ln(2)}$

1.4 c) .... $\boxed{e}$

1.4 d) .... $\boxed{3}$

1.4 e) .... $\boxed{-\infty}$

1.4 f) .... $\boxed{-1}$

Corrigés

1.1 a) $$u_n = \frac{n^2+1}{3n^3-4} = \frac{n^2}{3n^3} \times \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{3n^3}\right)} = \frac{1}{3n} \times \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{3n^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

1.1 b) $$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

1.1 c) $$u_n = n^2\,2^n - 3^n = -3^n\left(1 - n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty \qquad \text{en effet } \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \textit{ (croissance comparées)}$$

1.1 d) $$u_n = \frac{4^n+1}{2-3^n} = -\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{1+4^{-n}}{1-2.3^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

1.1 e) $$u_n = \frac{2-2n^2}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = -2 \times \frac{n^2}{2^n} \times \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(En effet : \textit{(croissance comparée)} } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \text{)}$$

1.1 f) $$u_n = \frac{3^n - n(-4)^n}{(-5)^n+1} = -\frac{n(-4)^n}{(-5)^n} \frac{1-\frac{1}{n}\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+(-5)^{-n}} = -n\left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1-\frac{1}{n}\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+(-5)^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(croissance comparée) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$)

1.2 a) $$u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 2\,\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \qquad \text{car } \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$$

1.2 b) $$u_n = 2^n\sqrt{1-2^{-n}} - 2^n = -\frac{\sqrt{1-2^{-n}}-1}{-2^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \qquad \text{car } 2^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

1.2 c) $$u_n = n - n\exp\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{car } -\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{e^x-1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$$

1.2 d) $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{car } \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ est bornée}$$

1.2 e) $u_n = n^{10} - 2^n = -2^n\left(1 - \dfrac{n^{10}}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car $\dfrac{n^{10}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(Croissances comparées)* .

1.2 f) $u_n = 2^n 5^{-\sqrt{n}} = \exp\big(n\ln(2) - \sqrt{n}\ln(5)\big)$ or $n\ln(2) - \sqrt{n}\ln(5) = n\ln(2)\left(1 - \dfrac{\ln(5)}{\ln(2)\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

1.3 a) $f(x) = \dfrac{x - e^x}{\ln(x) - x} = \dfrac{e^x}{x}\,\dfrac{1 - \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

(croissances comparées)

1.3 b) $\dfrac{x^2-1}{x-x^2} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{x^2-1}{1-x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-1}{1-x} = -1$ (< 0)

1.3 c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} = -x\sqrt{x}\,\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

1.3 d) $f(x) = \dfrac{e^x + x}{x^2 - x + 2} = \dfrac{x^2}{x^2}\,\dfrac{1 + \frac{e^x}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \dfrac{1 + \frac{e^x}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$

1.3 e) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$

1.3 f) Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et au voisinage de $-\infty$, $x + 1 = -\sqrt{(x+1)^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x + 1 = \frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

1.4 a) $f(x) = x - \ln(2x^3) = x - \ln(2) - 3\ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{x} - 3\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

(croissance comparée)

1.4 b) $f(x) = x - \ln(x + 2e^x) = x - x - \ln\big(2 + xe^{-x}\big) = -\ln\big(2 + xe^{-x}\big) \longrightarrow -\ln(2)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

(croissance comparée)

1.4 c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right)$ or $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = e^1$

1.4 d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1 \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 3$

1.4 e) $f(x) \leqslant x + 1$ et $x + 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *(Théorème de comparaison)*

1.4 f) $f(x) = x\ln(x-1) - x\ln(x) = x\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ car $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$
