Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

L'objectif de ce document est de donner quelques principes pour l'étude de suites récurrentes définies par leur premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 Un premier exemple

Exercice 1
On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}. \tag{1}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

de sorte que la relation de récurrence (1) s'écrit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}^{+\star}) \subset \mathbb{R}^{+\star}$. On dit que l'intervalle $\mathbb{R}^{+\star}$ est stable par f.
2. Déduire de la question précédente, à l'aide d'une preuve par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente. On note $l \in \mathbb{R}$ sa limite.
5. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence (1), déterminer une équation vérifiée par la limite l, et déterminer la valeur de l. Conclure.

2 Quelques principes généraux pour mener l'étude

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in I$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Les résultats qui suivent servent de trame pour l'étude de la suite (u_n). Ils ne sont pas à connaître par cœur, et doivent être redémontrés à chaque fois lorsqu'on les utilise.

2.1 La suite est-elle bien définie ?

Propriété 1 Si $f(I) \subset I$ (on dit que l'intervalle I est stable par f), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie.

Démonstration Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \in I$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 \in I$ par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$. Comme f est définie sur I, le nombre $u_{n+1} = f(u_n)$ est correctement défini.
  De plus, étant donné que $f(I) \subset I$ et que $u_n \in I$, on a $u_{n+1} \in I$.

Ceci achève la preuve par récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \in I$.

2.2 Monotonie de la suite

Propriété 2 Si I est stable par f et si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Remarque 1 Dans ce cas :

- Si $u_0 \leq u_1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $u_0 \geq u_1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration Supposons par exemple que $u_0 \leq u_1$ et prouvons par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

- Pour $n = 0$, on a, par hypothèse, $u_0 \leq u_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante sur I et comme u_n et $u_{n+1} \in I$, on a
  $$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$
  autrement dit
  $$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Ceci achève la preuve par récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Le cas où $u_0 \geq u_1$ s'adapte sans difficulté : dans ce cas la suite (u_n) est décroissante.

On peut aussi être amené à étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ (par étude de fonctions par exemple).

Propriété 3 Si $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Précisément :

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration Supposons par exemple que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $u_n \in I$.

Donc $f(u_n) \geq u_n$. Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On adapte sans difficulté cet argument au cas où pour tout $x \in I$, $f(x) \leq x$: dans ce cas la suite (u_n) est décroissante.

2.3 Convergence de la suite

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que dire de sa limite ?

Propriété 4 (Conservation des inégalités lors du passage à la limite) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$ et si (u_n) converge vers un réel l, alors $l \in [a, b]$.

Théorème 1 (Point fixe) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l et si $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$ (c'est-à-dire si f est continue au point l) alors $f(l) = l$.

Démonstration D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = l$.

Comme $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$, la caractérisation séquentielle de la limite prouve que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l).$$

On en déduit en passant à la limite que $l = f(l)$.

Remarque 2
- Les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les points fixes de f.
- Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Remarque 3 On utilise souvent le théorème de convergence monotone pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis le théorème du point fixe ci-dessus pour identifier la limite.

3 Étude d'un exemple : la méthode de Héron

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right). \tag{2}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right),$$

de sorte que la relation de récurrence (2) s'écrit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Déterminer un intervalle I tel que f soit strictement monotone sur I et tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(I) \subset I$$
(on dit que I est stable par f).
3. Étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et en déduire la position relative de la courbe de f, notée C_f et de la droite d'équation $y = x$, notée Δ. Tracer sur un même graphique C_f et Δ.
4. Que pouvez-vous conjecturer concernant la monotonie de la suite (u_n) ? Le démontrer..
5. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente.
6. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

4 Exercices d'application

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En déduire la monotonie de (u_n).
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 4
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, \pi/2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \pi/2]$
2. Étudier le signe de $x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[0, \pi/2]$.
3. En déduire que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5
Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. (En particulier, définition de la suite, monotonie et convergence). Que se passe-t-il si $u_0 = 2$?

Exercice 6 (Une autre suite de Héron)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

Reprendre les questions de l'exercice 1 pour étudier la suite (u_n) (attention la limite est différente).