Chapitre 14

Équations différentielles linéaires - Partie 1

Sommaire

Les équations différentielles sont un outil fondamental en sciences dès que l'on cherche à modéliser des phénomènes évoluant dans le temps selon des lois données, que ce soit en physique, en chimie, en écologie voire en économie.

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.

14.1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

Définition 14.1 (Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants)**.** Soit a et $b \in \mathbb{R}$.

- L'équation
$$y' + ay = b \tag{E}$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle
$$\underbrace{\text{linéaire}}_{\substack{y' \text{ et } y \text{ n'interviennent} \\ \text{qu'à la puissance 1}}} \quad \underbrace{\text{d'ordre 1}}_{\substack{\text{seuls } y \text{ et } y' \\ \text{apparaissent}}} \quad \underbrace{\text{à coefficients constants.}}_{a \text{ et } b \text{ sont des constantes}}$$
- On appelle l'équation
$$y' + ay = 0 \tag{H}$$
l'équation différentielle homogène associée à (E).
- Une solution de (E) est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) + ay(t) = b$$

Définition 14.2 (Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)**.**

- Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. L'équation
$$y'' + ay' + by = c \tag{E}$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$
l'équation différentielle homogène associée à (E).
- Une solution de (E) est une fonction deux fois dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c$$

Définition 14.3: Problème de Cauchy

- Soient a et $b \in \mathbb{R}$, ainsi que $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème consistant à trouver une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant
$$(\mathscr{P}_1) : \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
est appelé un problème de Cauchy.
- De même, pour a, b et $c \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ Le problème consistant à trouver une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant
$$(\mathscr{P}_2) : \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$
est aussi appelé un problème de Cauchy.

Remarque 14.1.

- Résoudre un problème de Cauchy consiste à trouver toutes les solutions d'une équation différentielle vérifiant une certaine <u>condition initiale</u>.
- Pour $\mathscr{P}_2$, il est important que les deux conditions initiales portent sur le même instant t_0.

Théorème 14.1: Structure de l'ensemble des solutions

Soit (E) une équation différentielle linéaire (d'ordre 1 ou 2) et (H) l'équation homogène associée.
Notons S l'ensemble des solutions de (E) et S_H l'ensemble des solutions de (H).
Soit y_0 une solution ***particulière*** de (E) alors
$$S = \{y_0 + y\,,\ y \in S_H\}$$
Cela signifie que les solutions de l'équation (E) sont exactement les fonctions obtenues en additionnant une particulière de (E) aux solutions de (H).

Méthode 14.1: Méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

On en déduit une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

- On résout l'équation homogène (H).
- On trouve une solution particulière y_0 de (E).
- On obtient la forme générale des solutions de (E) en additionnant la solution particulière y_0 aux solutions de (H).

Remarque 14.2. Cette méthode est également valable pour les équations différentielles linéaires à coefficients non constants.

14.2 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Comment procéder pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = b$?

On va suivre la méthode expliquée plus haut.

14.2.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 14.2: Solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$y' + ay = 0 \tag{H}$$

admet comme ensemble de solutions

$$S_H = \left\{t \mapsto Ke^{-at}\,,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple 14.1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles homogènes suivantes

1. $y' + 2y = 0$,
2. $y' = y$,
3. $2y' + y = 0$,
4. $y' = 0$,
5. $y' + \tau y = 0$, où τ est un paramètre réel.

14.2.2 Résolution de l'équation générale $y' + ay = b$ (cas d'un terme source constant)

Il nous reste maintenant à trouver une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.

Pour cela on va chercher parmi les fonctions les plus simples qu'il soit : les fonctions constantes et les fonctions affines :

- Premier cas $a \neq 0$

  Soit $C \in \mathbb{R}$ et $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto C \end{array}$. Alors y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle.

  y_0 est solution de (E) si et seulement si

  $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad a y(t) = b$$

  C'est-à-dire si et seulement si $C = \dfrac{b}{a}$.

- Second cas $a = 0$.

  Soit $C \in \mathbb{R}$ et $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto Ct \end{array}$. Alors y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée constante égale à C

  y_0 est solution de (E) si et seulement si

  $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = b$$

  C'est-à-dire si et seulement si $C = b$.

On résume cela dans la proposition suivante (dont les formules ne sont pas à conaître par coeur, mais à savoir retrouver).

Propriété 14.1: Solution particulière d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + ay = b \tag{E}$$

— Si $a \neq 0$ alors $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{b}{a} \end{array}$ est une solution de (E).

— Si $a = 0$ alors $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto bt \end{array}$ est une solution de (E).

On en déduit le théorème suivant

Théorème 14.3: Ensemble des solutions d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$y' + ay = b \tag{E}$$

— Si $a \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ t \mapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a} \,,\, K \in \mathbb{R} \right\}$$

— Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{t \mapsto K + bt \,,\, K \in \mathbb{R}\}$$

Théorème 14.4: Solution du problème de Cauchy

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) : \quad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple 14.2. Résoudre les problème de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y' - 2y = 4 \\ y(0) = 3 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} y' + y = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} y' - 3y = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$,
4. $\begin{cases} y' + \tau y = E_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, où τ, E et y_0 sont trois constantes réelles.

Remarque 14.3. Pensez à vérifier vos résultats !

14.3 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche résoudre l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. On va procéder suivant le même schéma que pour les équation du premier ordre.

14.3.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 14.5: Solutions d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

Soit

$$P: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + ax + b \end{array}$$

On appelle P le polynôme caractéristique de l'équation (H).
3 cas sont alors possibles :

- Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble S_H des solutions de (H) est alors
$$S_H = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble S_H des solutions de (H) est alors
$$S_H = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble S_H des solutions de (H) est alors
$$S_H = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exemple 14.3. Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - y' - 12y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0,$
3. $y'' + y = 0,$
4. $y'' - 8y' + 17y = 0.$

14.3.2 Résolution de l'équation générale - cas d'un terme source constant

Exercice 14.1. Résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) : \quad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 6 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

14.4 Entraînement

Exercice 14.2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (pensez à vérifier vos résultats !)

1. $y' = 4y,$
2. $y' + 4y = 3,$
3. $3y' + 5y = 2.$

Exercice 14.3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 9y = -18$,
2. (oscillateur harmonique) $y'' + \omega^2 y = 1$ (où ω est un réel fixé).