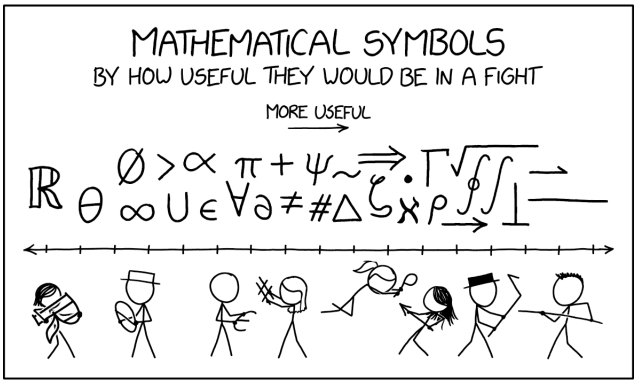
DM5 – Mathématiques

A rendre le lundi 3 Mars 2025

La qualité de la présentation, la lisibilité et la précision seront prises en compte dans l'appréciation. $\boxed{\text{Encadrez}}$, *dans la mesure du possible, les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*



Exercice 1. Le but de cet exercice est d'étudier la suite suivante : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée d'un terme initial $u_0 > 1$ et de la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n).$$

On note f la fonction $f : x \mapsto x - \ln(x)$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition f, que l'on notera D_f dans la suite.
2. Dresser le tableau de variations complet de f sur son domaine de définition (en particulier, calculez les limites de f aux bords de son domaine de définition).
3. Montrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie (c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in D_f$), et que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]1, +\infty[.$$
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^k = 0_n$$

où 0_n est la matrice carrée nulle d'ordre n.

Si A est nilpotente, le plus petit entier naturel k vérifiant $A^k = 0_n$ est appelé *indice de nilpotence* de A.

Par exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

L'indice de nilpotence de A vaut 2 car $A^2 = 0_3$ mais $A^1 \neq 0_3$.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} (i) & \begin{cases} \text{il existe une matrice } P \text{ carrée d'ordre } n \text{ inversible,} \\ \quad \text{et une matrice } D \text{ carrée d'ordre } n \text{ diagonale} \end{cases} \text{ telles que : } \Delta = P\,D\,P^{-1}, \\ (ii) & N \text{ est une matrice nilpotente,} \\ (iii) & \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta. \end{cases}$$

1. **Des matrices nilpotentes.**
   (a) On considère les matrices :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que J_1 et J_2 sont nilpotentes.

   Déterminer J_1^n pour tout entier $n \geqslant 2$ et J_2^n pour tout $n \geqslant 3$.

   (b) Les matrices J_1 et J_2 sont-elles inversibles ?

   (c) Montrer, dans le cas général, que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors A n'est pas inversible (*indication :* on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser judicieusement la définition de l'indice de nilpotence de A)

2. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que la matrice D définie par $D = P^{-1}\Delta P$ est diagonale.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\Delta^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

4. (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
   (b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

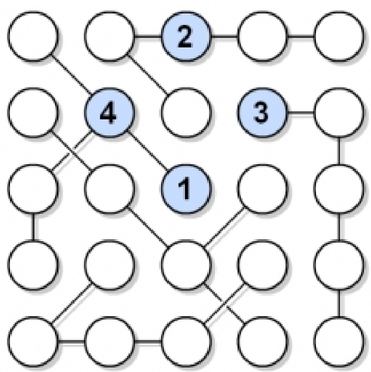


FIGURE 1 – Pour se détendre : remplir la grille ci-dessus sachant que les nombres de 1 à 5 doivent figurer une fois et une seule par colonne, par ligne et par chaîne.