TD$_{16}$ Polynômes

1 Calcul sur l'ensemble des polynômes

Exercice 1
Quel est le degré des polynômes suivants ?

$$P : x \mapsto (x+2)^6 - (x^2+4)^3, \qquad Q : x \mapsto \left(-2+3x+x^2\right)^3 (4x+5)^2$$

$$P_1 : x \mapsto \prod_{k=0}^{n} (x-k), \qquad P_2 : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} (2^k - x)^k$$

Exercice 2
On considère les deux polynômes :

$$P : x \mapsto (-x+3)^7 + x^7 + (x^2+3)^3, \qquad Q : x \mapsto \left(2(x^3-1)(x^2-2) - x^4\right)^3 - 4(X+5)^9$$

1. Quel est le degré des polynômes P et Q ?
2. Quel est le coefficient dominant des polynômes P et Q ?
3. Quel est le terme constant des polynômes P et Q ?

Exercice 3
On note $P : x \mapsto 1 + x^2$, calculer $P(i)$, $P(-1)$, $P(1+i)$.

Exercice 4
On note $P : x \mapsto x^2 + \sqrt{2}x + 1$, Exprimer les polynômes suivants sous une forme développée réduite : $P(x-1)$, $P(-x)$, $P(x^3-1)$

2 Factorisation et racines

Exercice 5

1. Soit le polynôme $P : x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que 1 est racine de P et factoriser P par $x-1$.
2. Soit le polynôme $Q : x \mapsto x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Montrer que 2 est racine de Q et factoriser Q par $x-2$.

Exercice 6
Factoriser les polynômes suivants (on pourra chercher des racines évidentes) :

$$x \mapsto x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8, \quad x \mapsto x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

3 Identification de polynômes

Exercice 7
Trouver tous les polynômes P réels tels que

$$P(x^2) = (x^2+1)P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit P un polynôme réel tel que $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que tous les monômes de P sont de degré pair.

Exercice 9 (Issu du DS8 de 2023-2024)
Dans cet exercice, on se propose de déterminer tous les polynômes P tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) = P(x) \tag{$\star$}$$

(autrement dit on cherche l'ensemble des polynômes réels P qui sont 1-périodiques sur $\mathbb{R}$).

1. Soit P un polynôme solution de $(\star)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P(n) = P(0).$$
   (b) On considère le polynôme Q défini par
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) - P(0).$$
   Montrer que le polynôme Q possède une infinité de racines réelles. En conclure que $Q = 0$.
   (c) En déduire que P est un polynôme constant.
2. Réciproquement, montrer que tout polynôme constant est solution de $(\star)$. Conclure.